ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
96

For Senior & Graduate Courses

量子力学から超対称性へ

超対称性のエッセンスを捉える

◆

坂本 眞人 著



サイエンス社

SGC ライブラリ-96

量子力学から超対称性へ

超対称性のエッセンスを捉える

坂本 眞人　著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1～40 省略（品切含）

41 **バイオインフォマティクスの基礎**
冨田勝監修 斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 **トポロジー入門**
田中利史・村上斉 共著　本体 1886 円

43 **アルゴリズムと計算量**
谷聖一著　本体 1857 円

44 **ゲーム理論のフロンティア**
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

47 **現代物理数学への招待**
鈴木淳史著　本体 1876 円

49 **ソリトンと物理学**
戸田盛和著　本体 1876 円

50 **確率的情報処理と統計力学**
田中和之編著　本体 1857 円

51 **超対称性理論**
太田信義・坂井典佑 共著　本体 1819 円

53 **ゲノム進化を考える**
斎藤成也著　本体 1429 円

54 **非平衡統計力学**
早川尚男著　本体 1790 円

55 **超幾何関数入門**
木村弘信著　本体 1857 円

56 **相対性理論**
三尾典克著　本体 1838 円

57 **3 次元トポロジーの新展開**
戸田正人著　本体 1867 円

58 **数理・情報系のための整数論講義**
木田雅成著　本体 1876 円

59 **コンピュータ将棋の頭脳**
小谷善行著　本体 1429 円

60 **計算神経科学への招待**
銅谷賢治著　本体 1429 円

61 **演習くり込み群**
柏太郎著　本体 1886 円

62 **熱方程式で学ぶ逆問題**
山本昌宏・金成燠 共著　本体 1429 円

63 **重力理論講義**
前田恵一著　本体 1886 円

64 **代数幾何入門講義**
小林正典著　本体 1876 円

65 **ネットワーク科学への招待**
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

67 **量子暗号理論の展開**
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 **量子力学の考え方**
根本香絵著　本体 1829 円

69 **量子コンピュータの基礎［第 2 版］**
細谷暁夫著　本体 1876 円

70 **重点解説 基礎微分幾何**
塩谷隆著　本体 1886 円

71 **ε-δ 論法再入門**
中神祥臣著　本体 1857 円

72 **超関数・フーリエ変換入門**
磯崎洋著　本体 1857 円

73 **問題例で深める物理**
香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円

74 **非線形現象と微分方程式**
小川知之著　本体 1781 円

75 **数物系のための圏論**
梶浦宏成著　本体 2143 円

76 **超弦理論を学ぶための場の量子論**
鈴木久男著　本体 2095 円

77 **重点解説 ジョルダン標準形**
西山享著　本体 1905 円

78 **重点解説 ベクトル・テンソル**
森川雅博著　本体 2095 円

79 **行列解析の基礎**
山本哲朗著　本体 2190 円

80 **超弦理論の基礎**
今村洋介著　本体 2429 円

81 **繰りこみ群の物理と数理**
伊東恵一著　本体 2190 円

82 **超重力理論**
谷井義彰著　本体 2381 円

83 **共形場理論**
伊藤克司著　本体 2238 円

84 **演習形式で学ぶ相転移・臨界現象**
宮下精二・轟木義一 共著　本体 2476 円

85 **実例で学ぶ精度保証付き数値計算**
中尾充宏・渡部善隆 共著　本体 2362 円

86 **リーマン予想の数理物理**
黒川信重・小山信也 共著　本体 2190 円

87 **量子多体系の物理**
藤本聡・川上則雄 共著　本体 2190 円

88 **演習形式で学ぶリー群・リー環**
示野信一著　本体 2381 円

89 **弦理論の代数的基礎**
髙橋篤史著　本体 2476 円

90 **アインシュタイン方程式**
白水徹也著　本体 2238 円

91 **CP 対称性の破れ**
林青司著　本体 2476 円

92 **弦の場の理論**
石橋延幸・村上公一 共著　本体 2429 円

93 **超弦理論の応用**
夏梅誠著　本体 2495 円

94 **複素多様体論講義**
辻元著　本体 2362 円

95 **幾何学の量子化**
前田吉昭・佐古彰史 共著　本体 2429 円

96 **量子力学から超対称性へ**
坂本眞人著　本体 2476 円

まえがき

もし，超対称性が自然法則の中で実現されていることが確かめられたなら，それはニュートンやアインシュタインが起こしたものに匹敵する，いや，それ以上の物理革命が起きたことを意味するかもしれない．なぜなら，超対称性理論は重力まで含めると，理論の整合性から，超弦理論 (superstring theory) にまで拡張される必要があると考えられているからである．そのとき，点粒子と思っていた "素粒子" は，実はひも (string) でできていたことになる．ひもの長さがあまりにも短いので，我々はそれを "点" 粒子だと思い込んでいるにすぎない．さらに超弦理論は Theory Of Everything (TOE) と呼ばれているように，万物の法則を記述する理論の候補と考えられている．つまり，我々は究極理論を手に入れたことになるのかもしれないのだ．

もし，超対称性が発見されたとなると，量子力学や場の量子論の教科書は一新されることになるだろう．超対称性の記述がない教科書は，"古い" 世代のものとして分類され，超対称性の項目はこれからの教科書には必須となるに違いない．そして，この本を読んだあなたは時代の先端に躍り出ることになる．

超対称性理論は，相対論と量子力学を融合させた相対論的場の量子論の枠組みの中で構築されている．したがって，超対称性理論を学ぶためには，その前に場の量子論を修得しておかねばならない．これは大学院レベルの高度な内容を含み，大学院で素粒子理論を学ぶ機会のない人にとってはかなり敷居が高い難解なものである．

この本を書こうと思ったのは，**学部レベルの量子力学の知識で**超対称性とはどういうものかを知ってもらいたかったからだ．そのために，場の量子論を迂回し量子力学の基礎的な知識のみを前提として，超対称性を説明しようと試みた．場の量子論を量子力学で置き換えたので，いくらかの代償を支払わなければならなかった．しかしその一方で，場の量子論固有の難解さに惑わされることがなくなり，超対称性のエッセンスを明確に捉えることができるようになった．その恩恵のほうが失ったものよりずっと大きいと思う．恩恵はそれだけではない．超対称性は，様々な量子力学系を厳密に解くための非常に強力な道具として役に立つことがわかっている．つまり，量子力学自身をより深く理解するための理論的な枠組みとして，超対称性のエッセンスを取り込んだ量子力学：**超対称量子力学**を考えることもできるのである．そこで，私が本書を書く際に想定した読者層は，次のような人たちである．

1. 超対称性理論に興味を持っているが，通俗書に書かれているお話以上のことを知りたいと思っている人．
2. 量子力学の基礎を固めたい，あるいは，より深く理解したいと思っている人．また，少し進んだ量子力学の教科書を探している人．
3. 現代物理学の指導原理としての対称性について，その重要性や役割について知りたい人．

本書は，超対称量子力学の標準的教科書となることを目指し，本書を読み終えれば一通りの専門的知識が身につくように配慮した．そのとき，他の教科書等を参照しなくてもよいように，できるだけ丁寧な説明を心掛けた．また，すべての式は省略することなく導出を行い，その際，読者がつまずくと思われる箇所や注意点に関して，数多くのコメントを与えておいた．

本書を執筆するにあたり，私のこれまでの研究に関わった仲間に感謝したい．また，石川楼丈氏，小武宏太郎氏，長澤智明氏，藤本教寛氏，吉川智規氏には原稿の段階から読んでもらい，多くの助言を頂いた．本書が読みやすいと感じたならば，それは彼らのおかげである．厚くお礼申し上げたい．分かり難い箇所が残っているとすれば，それはすべて著者一人の責任である．また，サイエンス社の平勢耕介氏には，本書の執筆の機会を与えて頂き感謝いたします．最後に，この本を執筆するにあたり，大きな支えとなってくれた妻と息子に感謝の意を表したい．

2012 年 7 月

坂本 眞人

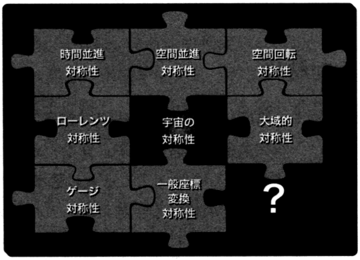
目　次

第 1 章
超対称性とは？

1.1 最後の一枚

今，あなたは「宇宙の対称性」というタイトルのジグソーパズルに挑戦している．そして，いよいよ最後の一枚というところで，そのピースがどこにも見あたらない．その場面を想像してもらいたい．そのとき，あなたは最後のピースを求めて部屋の中を隅から隅まで探し回るだろうか？ それとも，このジグソーパズルは一枚欠けた状態で完成なのだと探すのを止めてしまうだろうか？

上で述べた状況は，素粒子物理学が直面している状況そのものなのである．そう，ジグソーパズルの最後のピースが空いたままになっているのだ（図 1.1(a)）．我々はその最後のピースがどのようなものであるか，完全に知っている．そのピースには（もしあるとすれば）**超対称性**と書かれているはずだ（図 1.1(b)）．我々の宇宙は，最後に残されたピースをどこかに隠し持っているのだろうか？それとも，そのピースを作り忘れてしまったのだろうか？



(a) 「宇宙の対称性」が描かれたジグソーパズル



(b) 失われたピース

図 1.1 最後の一枚はどこに？

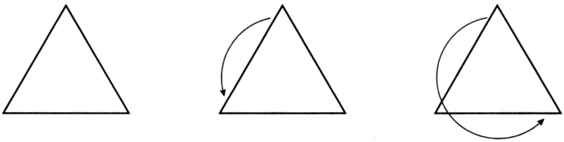


図 1.2　正三角形は 120° の回転対称性をもつ.

1.2　対称性とは何か？

超対称性（supersymmetry）について説明する前に，対称性とは何かについて述べておこう．対称性とは「変化させても変わらない性質」のことである．これでは初めて聞く人には何のことかわからないと思うので，身近な例で説明しておこう．たとえば，正三角形は 120° の回転対称性をもつという．これは，正三角形を 120° あるいは 240° 回転させた状態と初めの状態は区別できないことを意味する（図 1.2 参照）．

我々が特に興味があるのは，宇宙の対称性，すなわち，我々の住む宇宙で成り立っている物理法則の対称性である．たとえば，現在成り立っている物理法則は，過去でも同じように成り立っていたと考えられている．未来においても同様だ．このことを物理学では，時間の一様性，あるいは，時間並進対称性と呼んでいる．実際，ニュートン力学における運動方程式，電磁気学におけるマクスウェル方程式，量子力学におけるシュレディンガー方程式など，物理の基本方程式はすべて時間 t を $t+a$（a は任意の実数）に置き換える変換のもとで不変となっている*1)．時間並進対称性から，物理の基本法則の一つであるエネルギー保存則が導かれる．したがって，エネルギー保存則は個々の物質や理論によらない普遍的な法則であることがわかる．

1.3　宇宙の対称性

時間だけでなく，場所によらず物理法則は普遍である．このことを空間の一様性，あるいは，空間並進対称性と呼ぶ．あなたが転居するたびに新たに物理法則を学び直さねばならないとすると，それは悪夢以外の何物でもないだろう．幸いにも，我々の宇宙はどの場所も平等に創られているようだ．これら以外にも，空間回転対称性，特殊相対性理論の基礎となるローレンツ対称性，素粒子理論の根幹をなすゲージ対称性などが知られている（図 1.1(a) 参照）．

*1)　これは時間の原点を a だけずらす変換である．この変換で不変ということは，時間の原点を過去に選んでも未来に選んでも，方程式の形は変わらない，すなわち，物理法則は変わらないということだ．

時間と空間に関する新たな対称性を模索する中で,『我々の宇宙がもちうる最大の対称性をすべてリストアップせよ』という問題設定を立てた物理学者[1],[2]がいた．得られた答は，ある意味，驚くべきものであった．リストに書かれている対称性をみていくと，ひとつを除いてすべて実験でその存在が確認されているものばかりであった．そう，ひとつを除いてである．リストの最後に残された対称性が超対称性なのである．ここまでくれば，もうおわかりであろう．超対称性を実験で見つけることができれば，我々のジグソーパズルは完成するのである．

1.4 超対称性と万物の統一

超対称性とはどのような対称性かというと，ボース粒子とフェルミ粒子の入れ替えに対する対称性である．

$$\text{ボース粒子} \overset{\text{超対称性}}{\Longleftrightarrow} \text{フェルミ粒子} \tag{1.1}$$

ボース粒子とフェルミ粒子とは何かを説明するために，粒子のスピンという性質を説明しておこう．粒子が自転しているところを想像してもらいたい．このとき，回転の大きさがスピンの大きさに対応する．ここで不思議なことは，この回転の大きさが任意の値をとれず（Planck 定数 $\hbar$ を単位として），整数 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ または半整数 $(n = 1/2, 3/2, \cdots)$ しかとり得ないことである．スピンの大きさは粒子固有の性質なので勝手に値を変えることはできないし，スピンがゼロでなければ回転を止めることもできない．そして，整数スピンと半整数スピンをもつ粒子とでは性質が異なることがわかっており，整数スピンをもつ粒子をボース粒子と呼び，半整数スピンをもつ粒子をフェルミ粒子と呼ぶ．

フェルミ粒子の代表例は，皆さんもよく知っている電子である．電子はスピン 1/2 をもつ．陽子や中性子もスピン 1/2 をもつ粒子であるが，基本構成粒子という観点からは，それらを構成しているクォークがスピン 1/2 をもつ素粒子である.（陽子，中性子はクォーク 3 体で作られる複合粒子だ.）陽子，中性子および電子は原子・分子を構成する基本要素なので，スピン 1/2 をもつフェルミ粒子が物質を構成していることがわかる．グラビティーノと呼ばれるスピン 3/2 をもつフェルミ粒子は，宇宙の暗黒物質の候補の一つとも予想される素粒子であるが，今のところ実験的にはその存在は確認されていない．

一方，ボース粒子の代表例は，光子，すなわち，光である．光子はスピン 1 をもち，電荷や磁石の間に働く力（これをクーロン力と呼ぶ）の源となることが知られている．光子以外にスピン 1 をもつ素粒子として，グルーオンが挙げられる．グルーオンが媒介することによって，クォーク間に強い力が働き，クォーク 3 体で陽子や中性子が形成される．スピン 2 をもつボース粒子の例は，重力

表 1.1　素粒子のもつスピンと自然界における役割.「物質，力，時空」はそれぞれ異なるスピンの粒子が対応する.

スピン	素粒子の例	自然界における役割
0	ヒッグス粒子	質量の起源
1/2	電子，クォーク	**物質**を構成
1	光子，グルーオン	**力**の源
3/2	グラビティーノ	暗黒物質の候補
2	重力子	**時空**の源

子であり，その名の通り重力の源となる素粒子である．スピン 0 をもつボース粒子として，ヒッグス粒子と呼ばれる素粒子が知られている．ヒッグス粒子は，ゲージ対称性の破れと質量の起源としての重要な役割をもち，今後の素粒子理論の発展を左右すると考えられている．覚えておいて損のない名前だ．

表 1.1 に，それぞれのスピンをもつ素粒子と自然界における役割についてまとめておいた．この表 1.1 のスピン $1/2, 1, 2$ の素粒子の役割に注目してもらいたい．我々が**物質**と呼んでいるものはスピン 1/2 の素粒子から構成されている．電荷や磁石の間に働くクーロン**力**やクォーク間の強い**力**は，スピン 1 の素粒子が担っている．そして，アインシュタインの一般相対性理論が明らかにしたように重力は**時空**の源であり，それはスピン 2 の重力子によってもたらされる．このように我々が『物質・力・時空』と呼んでいるものは，素粒子の観点から見ると，スピン $1/2, 1, 2$ をもつ素粒子がそれぞれ対応する役割を担っていることがわかる．

さて，超対称性は，ボース粒子とフェルミ粒子の入れ替えの対称性であると説明した．ボース粒子は整数スピン，フェルミ粒子は半整数スピンをもつのであるから，超対称性は表 1.1 に書かれている異なるスピンをもつ粒子の入れ替えの対称性を意味する．つまり，超対称性は異なるスピンの粒子をお互いに関係させることで，これまで全く独立な概念と思われていた**『物質・力・時空』の統一**の可能性を示唆するものである．万物の統一の夢は，超対称性によってかなえられるかもしれない．

1.5　この本の特徴と使い方

『かけ算をマスターするためには，割り算を勉強すればよい.』

これは，学生から『量子力学をきちんと理解するためには，どうしたらいいですか？』と質問されたときに私がよく使うたとえだ．割り算ができるようになれば，かけ算は理解できていると思ってよいだろう．なぜなら，かけ算がわかっていなければ，割り算はできないからである．つまり，きちんと理解したい事柄があれば，それよりもレベルの高いものを学ぶと良いということだ．

量子力学は古典力学と違って，直感的なイメージが湧きにくく理解することがなかなか難しい．いくら教科書を読んでも理解できたかどうか不安になるのも無理はない．しかし，本書を読みこなしていくうちに，知らず知らずのうちに，量子力学の基礎はより確実なものとなってあなたの頭の中に定着していくはずだ．量子力学の基礎を固めたいと思っている人には，本書はうってつけの題材の一つといえるかもしれない．

まえがきにも書いた通り，本書は次のような読者層を想定している．

1. 超対称性理論に興味を持っているが，通俗書に書かれているお話以上のことを知りたいと思っている人．
2. 量子力学の基礎を固めたい，あるいは，より深く理解したいと思っている人．また，少し進んだ量子力学の教科書を探している人．
3. 現代物理学の指導原理としての対称性について，その重要性や役割について知りたい人．

1 の読者層の人たちには，すべての章に目を通していただきたい．特に，第 7 章のラグランジアン形式での議論は他書ではあまり触れられていないが，超対称性を特徴づける様々な性質が紹介されている．その意味でこの章は必須だ．2 の読者層の人たちは，前半の第 2 章から第 5 章を中心に勉強するとよい．厳密に解ける量子力学系に興味があれば，本書を読んだ後，文献 [10] へ進むとよいだろう．そこではより詳しい議論が与えられている．3 の読者層の人たちは，前半よりも第 6 章以降の後半に重点を置いて読むことを勧める．量子力学とはシュレディンガー方程式を解くことだと思い込んでいる人には，第 6 章以降の内容は ——対称性の観点からは極めて標準的なものなのだが—— 驚きかもしれない．現代物理学における対称性の重要性を知りたいならば，第 6 章以降は必読であろう．

各章の初めに「この章のあらまし」を付けておいたので，まずそれを読んでその章で議論されることの全体像をつかんでから内容に入ると理解がより進むだろう．本書では，量子力学の基礎的知識のみを前提としたので，すべての式は省略せずに導出している．そのために紙面が煩雑になるのを避けるため，≪ (1.1) 式の証明 ≫ という形で式の導出を記述し，本文と明確に区別できるようにしている．この部分は初めて読む際には読み飛ばしてかまわない．一度証明を理解したなら，二度目からは見る必要はない．そうすれば，話の流れが途切れることなく，本質の理解が進むだろう．また，読者がつまずくところや注意すべき点などを「コメント」という形でまとめておいた．是非参考にしてほしい．式の導出を丁寧に書きすぎたので，逆に，読者にとって自分で理解できているかどうか判断できないかもしれない．そのときは，随所にある演習問題を解くと良い．そこでの内容が理解できていれば解ける問題がほとんどなので，理解度のチェックとして使えるはずだ．

この本を読み終えた読者は，超対称量子力学の専門家としての第一歩を踏み出したことになる．さらに先へ進みたい読者のために，最後の章で本書と関連する話題や発展課題を紹介しておいた．是非次なるステップへ挑戦してもらいたい．また，場の量子論における超対称性に興味をもった読者のために，超対称場の量子論の基本的性質を付録にまとめておいた．超対称量子力学との類似性を感じ取ってほしい．

第 2 章
円周上の自由粒子と超対称性

あなたがよく知っていることを，他の人がより複雑で面倒な方法を使って説明し始めたら,「ああ，なんてわかりにくい説明だ」と思うことだろう．そしてそのとき，理解しようとする努力を止めてしまった経験はないだろうか？「知識」は時として新しい発見の妨げになることがある．これまでよく知られている結果を，全く異なる切り口で眺めることができたなら ——たとえ，それが使い物にならない方法にみえても—— 小躍りして喜ぶべきだ．新しい展開がそこから始まるかもしれないからだ．これから紹介する超対称性模型は，超対称性をもつ量子力学系の中で最も簡単なものである．その系は相互作用のない円周上の自由粒子である．この簡単な 1 次元量子力学系から，よもや，新しく学ぶことなどあるはずもないと，多くの人は思ってきたに違いない．そうでなければ，超対称性の発見はもっと早かったはずだ．この系はエネルギーの縮退をもつ．その縮退は，円周を右回りに回る波と左回りに回る波が同じエネルギーをもつことからくる．この説明は物理的にも直感的にもわかりやすいので，これ以外の小難しい説明を長い間誰も試みることはなかった．実は，この縮退を超対称性の観点からも説明できる．だが，上で述べた説明に比べると，それは少々おおげさにみえる舞台装置を必要とする．しかし，それは超対称性というパラダイスへの扉だったのだ．

2.1 この章のあらまし

この章の目的は 2 つある．一つ目は，最も簡単な超対称量子力学模型の例をもちいて，超対称性の持つ特徴を示すことである．超対称性の重要な特徴は，図 2.1 のエネルギースペクトラムに見てとれる．∘ あるいは ∙ はそのエネルギーに状態が 1 つあることを意味する．この図からエネルギー固有値はゼロまたは正で，ゼロエネルギー以外のスペクトラムは ∘ と ∙ で 2 重縮退していることがわかる．ゼロエネルギー状態は，∘ や ∙ の状態の数に特に制限は付かない．この

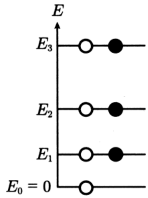


図 2.1　超対称性を持つ理論の典型的なエネルギースペクトラム．この図はこれから何度もお目にかかることになるだろう．

ようなスペクトラムが得られたなら，すぐに次のような関係を満たす 3 つのエルミート演算子 $H, Q, (-1)^F$ が，その系に存在していないか探すべきである．

$$H = Q^2, \quad (-1)^F Q = -Q(-1)^F, \quad \left((-1)^F\right)^2 = 1\,.$$

H はハミルトニアン，Q は超電荷と呼ばれる演算子だ．$(-1)^F$ の固有値は ± 1 で，その固有値はエネルギー固有状態を $+1$ と -1 の 2 つのクラスに分ける．この分類は図 2.1 の ∘ と • に対応するものである．この章で考察する円周上の自由粒子の系では，上の関係を満たす演算子 $H, Q, (-1)^F$ が実際に存在する．これを示すことが二つ目の目的だ．

2.2　円周上の自由粒子

半径 R の円周上に束縛された自由粒子の 1 次元量子力学系を考察しよう．円周上の波動関数 $\psi(x)$ は，円周をぐるっと一周回ったときに元に戻らなくてはならないので，次の周期的境界条件*1)

$$\psi(x + 2\pi R) = \psi(x) \tag{2.1}$$

を満たす（図 2.2 参照）．我々はこの系のエネルギーに興味があるので，次のエネルギー固有値方程式

$$H\psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \tag{2.2}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}, \quad -\pi R \le x \le \pi R, \tag{2.3}$$

を周期的境界条件 (2.1) のもとで解くことにしよう*2)．ここで H はハミルトニアン演算子である．自由粒子の系なのでポテンシャルエネルギーはゼロである．固有値方程式 (2.2) を次のように書き換えると，

*1)　波動関数の時間依存性はこれからの議論では重要でないので，ここでは省略している．

*2)　x の範囲は $0 \le x \le 2\pi R$ としてもよいが，後で空間反転：$x \to -x$ を定義したいので，この空間反転が見やすいように原点 $x = 0$ を中心にとって $-\pi R \le x \le \pi R$ とした（図 2.3 参照）．

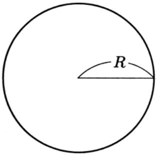


図 2.2 半径 R の円周上に束縛された自由粒子の 1 次元量子力学系．波動関数は周期的境界条件 $\psi(x+2\pi R)=\psi(x)$ を満たす．

$$\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}=-\left(\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}\right)^2\psi_n(x), \tag{2.4}$$

x で 2 回微分すれば元に戻り，かつ，係数 $-(\sqrt{2mE_n}/\hbar)^2$ を出す関数 $\psi_n(x)$ を求めよという問題に等しい．この問題では (2.1) 式の境界条件を満たさなければならないので，解は周期性をもつ三角関数 $\cos(\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}x)$ あるいは $\sin(\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}x)$ で与えられることがわかる．実際，これらの関数が (2.4) 式を満たすことは，代入すれば簡単に確かめられるだろう．この解が周期的境界条件 (2.1) にしたがうためには，$\sqrt{2mE_n}/\hbar\times 2\pi R=2\pi\times$ (整数) を満たしていなければならない．この条件からエネルギー固有値は任意の値を取ることができず，次の量子化条件にしたがう離散化された値のみが許されることになる．

$$E_n=\frac{1}{2m}\left(\frac{n\hbar}{R}\right)^2,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{2.5}$$

このとき，固有値 E_n に属する固有関数は次式で与えられる*3)．

$$\psi_{n,+}(x)=N_{n,+}\cos\left(\frac{n}{R}x\right),\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{2.6a}$$

$$\psi_{n,-}(x)=N_{n,-}\sin\left(\frac{n}{R}x\right),\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.6b}$$

ここで $\psi_{n,+}$ には $n=0$ のモードが含まれているが，$\psi_{n,-}$ には $n=0$ が含まれていないことに注意しておこう．これは $\sin 0=0$ なので $\psi_{0,-}(x)=0$ となり解として意味をもたないからである．規格化定数 $N_{n,\pm}$ は $\int_{-\pi R}^{\pi R}dx|\psi_{n,\pm}(x)|^2=1$ となるように決める．$N_{n,\pm}$ の位相は超対称性の性質が見えやすくなるように決めることにする．これについては後で議論する．

上で得られた結果の物理的意味を解説しておこう．この量子力学系は，線分を長さ $L=2\pi R$ のひもだとみなし，そのひも上の波の分類をすることに本質的に等しい．ただし，ひもの左端と右端では波は連続的につながっていなければならない．これらの波は長さ L の線分に含まれる波長の数 n と線分の中心に対して左右対称 (+)，あるいは，左右反対称 (−) な波かで分類され，それぞれ

*3) n は 0 または正の整数を考えれば十分である．なぜなら，$\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$ なので，$\psi_{-n,\pm}(x)=\pm\psi_{n,\pm}(x)$ となり，$\psi_{-n,\pm}(x)$ は本質的に $\psi_{n,\pm}(x)$ に等しいからである．

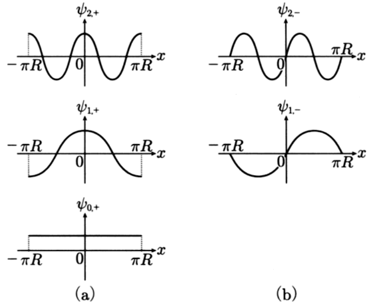


図 2.3 (a) 左右対称な波 $\psi_{n,+}$ $(n = 0, 1, 2)$ の例．(b) 左右反対称な波 $\psi_{n,-}$ $(n = 1, 2)$ の例．n は線分 $-\pi R \leq x \leq \pi R$ に含まれる波長の数．$n = 0$ の波は $\psi_{n,+}$ にしか存在しない．

固有関数 $\psi_{n,\pm}$ に対応する．図 2.3 に $n = 0, 1, 2$ の波 (固有関数) の例が図示されている．

ここで固有関数と固有値に関して重要な性質をまとめておこう．$\psi_{n,+}(x)$ と $\psi_{n,-}(x)$ は長さ L の線分に n 個の波長を含む波を表し，空間反転 $x \to -x$ に対する偶奇性 (対称/反対称性)

$$\psi_{n,\pm}(-x) = \pm\psi_{n,\pm}(x) \tag{2.7}$$

によって区別される．このとき，すべての $n \geq 1$ に対して $\psi_{n,+}$ と $\psi_{n,-}$ の両方が存在し，同じ固有値 E_n を与えエネルギーの縮退を引き起こしている．ところが，ゼロエネルギー $E_0 = 0$ をもつ $n = 0$ のモード（ゼロモードと呼ばれる）は特別で $\psi_{n,+}$ にしか含まれていない．これらの状況を図にまとめたものが図 2.4 である．このエネルギースペクトラムの図にこの模型の重要な性質が

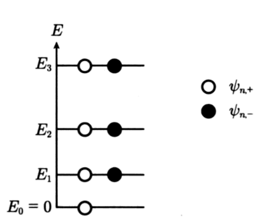


図 2.4 このエネルギースペクトラムの中に，超対称性の 3 つの重要な性質が見てとれる．i) $E_n \geq 0$, ii) $n = 0$ を除いて $\psi_{n,+}$ と $\psi_{n,-}$ でエネルギーの縮退が起こる．iii) $E = 0$ の状態は必ずしも縮退しない．

すべて含まれている．エネルギー E_n はゼロまたは正で，ゼロエネルギー状態を除いてすべての正エネルギー状態は縮退している．この性質はこの模型固有のものなのか，それともこの模型を含めたより一般の理論のもつ性質なのか今の段階では皆目見当がつかないだろう．実は，この性質こそが超対称性のもつ一般的な性質なのである．**図 2.4 のスペクトラムをもつ量子力学系に出会ったら，そこには超対称性が隠れていると考えてまず間違いない．**次節で図 2.4 のようなスペクトラムを導く仕組みは何かを明らかにしよう．

■ コメント ■

エネルギーの縮退は，円周を右回りに進む波と左回りに進む波が同じエネルギーをもつことからも説明できる．(2.6) 式の基底を変えて，次の線形結合に取り直したものがそれぞれ円周上の右 (R) 進行波と左 (L) 進行波

$$\phi_{n,R}(x) \equiv N_{n,R}\left(\cos\left(\frac{n}{R}x\right) + i\sin\left(\frac{n}{R}x\right)\right) = N_{n,R}\exp\left(i\frac{n}{R}x\right),$$
$$\phi_{n,L}(x) \equiv N_{n,L}\left(\cos\left(\frac{n}{R}x\right) - i\sin\left(\frac{n}{R}x\right)\right) = N_{n,L}\exp\left(-i\frac{n}{R}x\right).$$

に対応する．

■

2.3 超対称性の基本構造

超対称性の基本構造とは，個々の超対称性模型に依存しない超対称性理論のもつ共通の性質を抜き出したものをここでは指している．たとえば，エネルギー固有値や固有関数の形はポテンシャルや境界条件などによって一般に異なる．一方，図 2.4 に描かれたエネルギースペクトラムの特徴はすべての超対称性理論に共通する性質である．個々のエネルギーの値や固有関数の形については何も語らないが，エネルギー固有値はゼロまたは正で，ゼロエネルギー状態以外は必ず縮退が起こる．このような性質を保証するものは，ハミルトニアン H に加えて，2 つのエルミート演算子 $Q, (-1)^F$ とそれらが満たす次の関係式である．

$$H = Q^2, \tag{2.8a}$$
$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F, \tag{2.8b}$$
$$\left((-1)^F\right)^2 = 1. \tag{2.8c}$$

これらの関係式を満たす演算子 $H, Q, (-1)^F$ が存在する量子力学系では，図 2.4 のようなスペクトラム（エネルギー固有値はゼロまたは正，ゼロエネルギー状態を除いて必ず縮退が起こる）が現れる．その証明と詳しい説明は，次章の主題である．この節では，上の関係を満たすエルミート演算子 $H, Q, (-1)^F$ が，前節で考察した円周上の自由粒子の系に含まれていることを具体的に示すことにする．

超対称性理論のハミルトニアン演算子 H は次の特徴的な形をもつ．

$$H = Q^2. \tag{2.9}$$

ここで Q は**超電荷 (supercharge)** と呼ばれる演算子である．前節の量子力学系では H は (2.3) 式で与えられていたので，$Q \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} p = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx}$ と定義すれば確かに上式の形で表されていることがわかる．運動量演算子 $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ はエルミートなので超電荷 Q もエルミート演算子である．

$$Q^\dagger = Q. \tag{2.10}$$

超対称性の基本構造に含まれるもう 1 つの重要なエルミート演算子 $(-1)^F$ を導入しておこう．この演算子は 2 回続けて作用すると元に戻り，

$$\left((-1)^F\right)^2 = 1 \tag{2.11}$$

を満たす（(2.8c) 参照）．この関係から $(-1)^F$ の固有値は $+1$ と -1 であることがわかる[*4]．この演算子の役目は，すべての状態をその固有値 $(-1)^F = +1$ と -1 で，2 つのクラスに分類することである．また，この演算子の重要な性質として，超電荷 Q との**反可換性** (2.8b) がある．すなわち，

$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F. \tag{2.12}$$

$(-1)^F$ と Q の順番を入れ替えるとマイナス符号がでる（すなわち反可換）という性質が，この式の大事な点である．さて問題は，円周上の自由粒子の量子力学系において，$(-1)^F$ に対応する演算子は何かということである．その演算子は (2.11) 式と (2.12) 式を満たさねばならない．答えは，空間反転演算子（あるいはパリティ演算子）$\mathcal{P}$ である．パリティ演算子は空間反転を引き起こす演算子で波動関数 $\psi(x)$ に

$$\mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x) \tag{2.13}$$

と作用する．実際，パリティ演算子は $\mathcal{P}^2 = 1$，および，$\mathcal{P}Q = -Q\mathcal{P}$ を満たすので，円周上の自由粒子の量子力学系では $(-1)^F \equiv \mathcal{P}$ と対応づければ，(2.11) 式と (2.12) 式を満たす演算子 $(-1)^F$ が得られたことになる．

≪ $(-1)^F \equiv \mathcal{P}$ が (2.11) 式と (2.12) 式を満たすことの証明 ≫

ここで示すことは，(2.11) 式と (2.12) 式で $(-1)^F = \mathcal{P}$ とおいた式

$$(2.11)\text{ 式} \overset{(-1)^F=\mathcal{P}}{\Longrightarrow} \mathcal{P}^2 = 1, \tag{2.14}$$

$$(2.12)\text{ 式} \overset{(-1)^F=\mathcal{P}}{\Longrightarrow} \mathcal{P}Q = -Q\mathcal{P}, \tag{2.15}$$

である．パリティ演算子 $\mathcal{P}$ は空間反転を引き起こす演算子なので，2 回演算する

*4）$(-1)^F$ の固有値と固有関数をそれぞれ λ, ψ_λ としておくと，$(-1)^F\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ を満たす．したがって，$((-1)^F)^2 = 1$ の関係は，$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ を意味する．

と元に戻る．すなわち，(2.14) 式を満たす．(2.15) 式を証明するには，右から任意の関数 $\psi(x)$ をかけて $\mathcal{P}Q\psi(x) = -Q\mathcal{P}\psi(x)$ を確かめればよい．超電荷 Q はここでは $Q = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}$ で与えられているので，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}Q\psi(x) &= \mathcal{P}\left(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}\,\psi(x)\right) \overset{(2.13)}{=} -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{d(-x)}\,\psi(-x) \\
&= +\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}\,\psi(-x) \overset{(2.13)}{=} +\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}\,\big(\mathcal{P}\psi(x)\big) \\
&= -Q\mathcal{P}\psi(x).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

演習問題 2.1　3 つの演算子 $H, Q, (-1)^F$ がエルミート演算子であることを確かめよ．

ヒント： 演算子 A が，任意の波動関数 $\psi(x), \phi(x)$ に対して次式を満たすとき，A をエルミート演算子と呼ぶ．

$$
\int_{-\pi R}^{\pi R} dx\,\phi^*(x)\,\big(A\psi(x)\big) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx\,\big(A\phi(x)\big)^*\psi(x)\,. \tag{2.16}
$$

したがって，演算子 $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$，$Q = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}$，$(-1)^F = \mathcal{P}$ がエルミートであるためには，次式が成り立つ必要がある．

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi R}^{\pi R} dx\,\phi^*(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\right) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\right)^*\psi(x)\,,\\
&\int_{-\pi R}^{\pi R} dx\,\phi^*(x)\left(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}\psi(x)\right) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx\left(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}\phi(x)\right)^*\psi(x)\,,\\
&\int_{-\pi R}^{\pi R} dx\,\phi^*(x)\,\big(\mathcal{P}\psi(x)\big) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx\,\big(\mathcal{P}\phi(x)\big)^*\psi(x)\,.
\end{aligned}
$$

ここで，$\psi(x), \phi(x)$ は周期的境界条件 (2.1) を満たす任意の波動関数である．この証明に必要なものは，部分積分と波動関数の周期的境界条件 (2.1)，それから変数変換 $x \to x' = -x$ のもとでの積分の関係式 $\int_{-\pi R}^{\pi R} dx f(x) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx' f(-x')$ である．

円周上の自由粒子の量子力学系では $(-1)^F$ はパリティ演算子 $\mathcal{P}$ に対応していたが，一般の超対称量子力学系では $(-1)^F$ が $\mathcal{P}$ で与えられるとは限らない．実際，第 4 章で解析するウィッテン模型では，$(-1)^F$ の定義は異なる．また，（量子力学ではなく）場の量子論における超対称性では，演算子 $(-1)^F$ はボース的状態とフェルミ的状態を区別する重要な役割を持つ．この点について，少し補足説明をしておこう．

■ コメント ■

場の量子論 (quantum field theory) における超対称性理論では，$(-1)^F = +1$ の状態はボース的，$(-1)^F = -1$ はフェルミ的状態に対応する．

$$
\text{超対称場の量子論: } (-1)^F = \begin{cases} +1 & \text{ボース的状態} \\ -1 & \text{フェルミ的状態} \end{cases} \tag{2.17}
$$

ボース的状態とは，スピン角運動量が整数の状態で，ボース–アインシュタイン統計にしたがう．一方，フェルミ的状態とは，スピン角運動量が半整数の状態で，フェルミ–ディラック統計にしたがう．場の量子論でも量子力学でも超電荷 Q は，$(-1)^F = +1$ の状態を $(-1)^F = -1$ の状態（あるいはその逆）に変えるが，場の量子論の場合は (2.17) 式から

$$\text{超対称場の量子論：ボース的状態} \overset{Q}{\longleftrightarrow} \text{フェルミ的状態} \tag{2.18}$$

を意味する．これは，場の量子論での超電荷が状態に作用すると，その状態のスピン角運動量を $\hbar/2$ だけ変化させるからである*5)．一方，超対称量子力学における超電荷は，状態のスピン角運動量を変えないので，ボース的（フェルミ的）状態はボース的（フェルミ的）のままで，(2.18) のように統計性を入れ替えたりはしない．この点は，場の量子論と量子力学での超対称性の大きな違いである．

■

これで必要な式はすべて揃った．まとめることにしよう．超対称量子力学における重要な役者は 3 つある．一つ目はエネルギーを測るハミルトニアン演算子 H，二つ目は状態を ± 1 の固有値で 2 つのクラスに分類するための演算子 $(-1)^F$，最後は（次章で示すように）$(-1)^F = +1$ の状態と $(-1)^F = -1$ の状態を入れ替える超電荷 Q である．それらは次の量子力学的超対称性関係

$$H = Q^2, \tag{2.19a}$$

$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F, \tag{2.19b}$$

$$\left((-1)^F\right)^2 = 1, \tag{2.19c}$$

を満たす．3 つの演算子 $H, Q, (-1)^F$ はすべてエルミート演算子であることに注意しておく．これらの関係式は超対称量子力学の根幹をなすもので，すべての超対称量子力学に共通する関係式である．円周上の自由粒子の系では (2.19) 式を満たす演算子は $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$，$Q = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}$，$(-1)^F = \mathcal{P}$ と与えられたが，別の超対称量子力学模型では $H, Q, (-1)^F$ の定義は異なるであろうし，物理的意味も違ったものになるだろう．重要な点は，$H, Q, (-1)^F$ の個々の具体的な表式ではなく，それらが (2.19) 式の関係を満たすということだ．そしてそのとき，図 2.4 の特徴的なエネルギースペクトラムが現れることになる．超対称量子力学にとって (2.19) 式は最低限必要とされるもので，どれひとつ欠けても超対称性の性質は失われてしまう．それ故，(2.19) 式を最小超対称性関係と呼んでもよいだろう．それでは，次章で超対称性の基本構造式 (2.19) から導かれる一般的性質を明らかにしよう．

*5) 付録に場の量子論での超対称性について簡単な解説を与えておいた．

演習問題 2.2 周期的境界条件 (2.1) の代わりに，次のひねられた境界条件 (twisted boundary condition) *6)

$$\psi(x + 2\pi R) = e^{i\theta}\psi(x), \quad (0 \le \theta < 2\pi) \tag{2.20}$$

のもとで，エネルギー固有関数とエネルギー固有値が次式で与えられることを確かめよ．

$$\psi_n(x) = N_n \exp\left\{ i\left(\frac{n + \theta/2\pi}{R}\right) x \right\}, \tag{2.21a}$$

$$E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{(n+\theta/2\pi)\hbar}{R}\right)^2, \quad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.21b}$$

ここで，n は任意の整数値をとることに注意しておく．また，エネルギーの縮退が起きるのは $\theta = 0, \pi$ のときのみであることを確かめよ．

■コメント■

この演習問題は，この章での解析が理解できたかどうかを確かめるのにちょうどいい問題だ．$\theta = 0$（この章で取り扱った周期的境界条件）の場合と違って，$\theta = \pi$（反周期的境界条件 $\psi(x + 2\pi R) = -\psi(x)$）のときはゼロエネルギー状態は存在せず，すべてのエネルギー状態は 2 重に縮退する（図 2.5(c) 参照）．しかし，$\theta \neq 0, \pi$ のときは，縮退は起こらない（図 2.5(b) および (d) 参照）．なぜ，$\theta = 0, \pi$ の場合だけ縮退が起こるかは，これらの系のパリティ不変性にその秘密がある．実は，境界条件 (2.20) は，$\theta = 0, \pi$ の場合を除いてパリティ不変性を

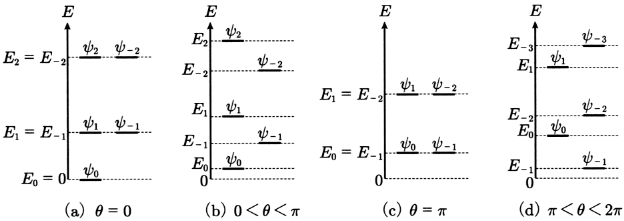


図 2.5 ひねられた境界条件 (2.20) のもとでのスペクトラム．縮退は $\theta = 0, \pi$ のときのみ起こり，$\theta \neq 0, \pi$ のときは縮退は起こらない．$\theta = 0$（周期的境界条件）のときはゼロエネルギー状態が存在するが，$\theta = \pi$（反周期的境界条件）のときはゼロエネルギー状態は存在せず，すべてのエネルギーは 2 重縮退する．

*6) この境界条件を課した量子力学系は，円周（リング）に束縛された電子を考え，リングの真ん中に（ただし，リングには触れないように）リングと垂直に磁場をかけた系と等価である．

破っている[*7)]．そのため，$\theta \neq 0, \pi$ のときは，パリティ演算子 $\mathcal{P}$ は境界条件を不変に保たないので，波動関数に作用させることはできない．(波動関数に無理矢理パリティ演算子 $\mathcal{P}$ を作用させると，もはや，その波動関数はもとの境界条件を（$\theta = 0, \pi$ 以外では）満たさない.)
そのために，(反) 周期的境界条件の場合と違って，$\theta \neq 0, \pi$ の場合はパリティ演算子 $\mathcal{P}$ を意味のある演算子とみなすことはできないのである[*8)]．演算子 $(-1)^F$ の役割については，次章 3.8 節を見てもらうとよいだろう．

■

*7) パリティ変換 $\mathcal{P}$ で境界条件 (2.20) は $\psi(-(x+2\pi R)) = e^{i\theta}\psi(-x)$ と変換される．(パリティ変換では波動関数の引数全体の符号がひっくり返る.) ここで，x は何でもよかったので，x をあらためて $-x-2\pi R$ に置き換えると $\psi(x) = e^{i\theta}\psi(x+2\pi R)$，あるいは，$\psi(x+2\pi R) = e^{-i\theta}\psi(x)$ となる．これが元の境界条件 (2.20) と等しくなるのは，$e^{2i\theta} = 1$ のとき，すなわち，$\theta = 0, \pi$ のどちらかの場合のみである．

*8) $\theta = 0, \pi$ のときは，パリティ演算子 $\mathcal{P}$ は意味をもつ．実際，エネルギー固有関数 (2.21a) に作用すると，$\theta = 0$ の場合は $\mathcal{P}\psi_n(x) = \psi_{-n}(x)$，$\theta = \pi$ の場合は $\mathcal{P}\psi_n(x) = \psi_{-n-1}(x)$ を満たす．

第 3 章
超対称性と一般的性質

本質に近付けば近付くほど，物事は単純になるようだ．それはちょうど木の枝葉を取り払っていくと，最後に太い幹が残るのに似ている．何かを説明するのに，あれやこれやといろんなものを持ち出さないといけないようでは，余分な枝葉を落とし切れておらず本質が見えていない可能性が高い．単純さの追求は本質の理解に欠かせない作業だ．アインシュタインは一般相対性理論で『自然の法則はどのような観測者からみても不変である』と看破した．実に単純で美しい．原理と呼ぶに相応しいものだ．自然の本質は単純さにあるように思えてならない．

3.1 この章のあらまし

本章はこの教科書全体を通じて，特に重要な内容が含まれている．超対称性の本質がここで明らかになる．十分理解してから先に進むようにしてほしい．量子力学で使われる数学に不安がある人は，3.2 節に必要な知識をまとめておいたので，そこで数学的基礎を固めておくとよいだろう．

超対称性をもつ理論すべてに共通する性質とは一体何だろうか？　それを明らかにすることがこの章の目的である．そのためには，不要な枝葉はすべて取り除き，超対称性理論の本質に迫る必要がある．これ以上何か 1 つでも取り除くと，超対称性の特徴が失われてしまうというところまで，枝葉は削ぎ落とさねばならない．これが前章の 2.3 節で導いた超対称性関係

$$H = Q^2, \tag{3.1a}$$

$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F, \tag{3.1b}$$

$$\left((-1)^F\right)^2 = 1, \tag{3.1c}$$

である．演算子 $H, Q, (-1)^F$，あるいは，上の 3 つの関係式のどれ 1 つが欠け

ても超対称性の特徴は失われてしまう．必要なことは，上の関係を満たす 3 つのエルミート演算子 $H, Q, (-1)^F$ の存在であり，H や $Q, (-1)^F$ の具体的な中身は枝葉にすぎない．たった 3 つの関係式 (3.1) に超対称性の本質が隠れているとは，なかなか想像できないかもしれない．実際，(3.1) 式をただ眺めているだけでは，それほど多くの情報を得ることはできない．これらの関係式と，H と $(-1)^F$ の固有状態とを組み合わせることによって，初めて超対称性のもつ特徴（3.3 節に挙げられている超対称性の基本的性質 i) ～iv)）が鮮明に浮かび上がってくる．その証明は 3.4 節でなされる．これらの基本的性質 i) ～iv) は，$H, Q, (-1)^F$ の具体的表示には依存しない．すべての超対称性理論に共通する普遍的な性質である．本章がこの教科書全体で重要な位置を占める理由はここにある．

超対称性関係 (3.1) は，$N = 2$ 超対称性代数と呼ばれる本質的に等価な関係式に書き換えることができる．このとき，2 つの実超電荷を使った表現と 1 つの複素超電荷を使った表現の 2 通りの表し方がある．

実超電荷を使った表現	複素超電荷を使った表現	
$\{ Q_i , Q_j \} = 2H\delta_{ij}\,,$	$\{ \mathcal{Q}^\dagger , \mathcal{Q} \} = 2H\,,$	
$[H , Q_i] = 0\,,$	$\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0\,,$	(3.2)
$(i, j = 1, 2)$	$[H , \mathcal{Q}] = [H , \mathcal{Q}^\dagger] = 0\,.$	

ここで，$[A, B] \equiv AB - BA$, $\{A, B\} \equiv AB + BA$ である．また，実超電荷とはエルミート超電荷のことを指す．(3.1) 式を使って超対称性の基本的性質を導いた議論を，上の $N = 2$ 超対称性代数をもちいて再度行うことができる．もちろん物理的な結論は同じだが，そこでは興味ある理論構造がみえてくる．ここまでは形式的な議論なので，最後の節では，前章で考察した円周上の量子力学模型をもちいて，それまでの議論を具体的に確かめることにする．

3.2 数学的準備

この節では，読者の便宜のために，この章で使われる数学的道具についてまとめておいた．量子力学の数学的基礎を身につけているならば，この節は飛ばして次節から読み始めるとよい．少しでも数学の取り扱いに不安がある読者は，この節を読んで量子力学の数学的基礎をしっかり固めることを強く勧める．数学は物理を引き出すための強力な道具であり，**自然を記述する言語**でもあるのだ．

3.2.1 内積の定義

超対称性を議論するためには，エルミート共役やエルミート演算子の性質が特に重要となる．これらの道具を持たずに超対称性への旅に出るのは，無謀というものだ．量子力学においてエルミート演算子は特に重要な役割を担う．な

ぜなら，すべての物理量はいったん対応するエルミート演算子に置き換えられ，その固有値として物理量の値が得られるという理論的構造になっているからである．エルミート演算子の定義を与えるためには，エルミート共役の概念が必要となる．さらに，エルミート共役を定義するためには，内積の概念を必要とする．というわけで，まずは波動関数の内積の定義から出発することにしよう．

任意の（複素）波動関数 $\Phi(x), \Psi(x)$ に対して**内積 (inner product)** $\langle \Phi | \Psi \rangle$ を次式で定義する*1)．

$$\langle \Phi | \Psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (\Phi(x))^* \, \Psi(x). \tag{3.3}$$

ここで $*$ は複素共役を表す．内積の記号 $\langle \Phi | \Psi \rangle$ はディラックによるブラケット記法である．この記法はいろんな解析を非常に楽にしてくれる偉大な“発明”だ．使い込めば込むほど，そのありがたさが身にしみてくるのがわかる．しっかりと手を動かしてその使い方に慣れるようにしよう．この章で何度もお目にかかる内積の重要な性質は，次のものである．

$$\langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0, \tag{3.4a}$$

特に，

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi = 0. \tag{3.4b}$$

ここで，$\| \, |\Psi\rangle \, \| \equiv \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$ は，状態 Ψ あるいは $|\Psi\rangle$ の**ノルム**と呼ばれるゼロまたは正の量である．証明は，正またはゼロの被積分関数 $|\Psi(x)|^2 \geq 0$ に対する次の積分の性質から直接得られる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\Psi(x)|^2 \geq 0 \, , \tag{3.5a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\Psi(x)|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(x) = 0 \, . \tag{3.5b}$$

上の内積の性質 (3.4) は完全に身につけておかなければならない．さもなければ，超対称性の理解には到底おぼつかない．また，よく使われる性質として次のものがある．

$$\langle a\Phi | \Psi \rangle = a^* \langle \Phi | \Psi \rangle, \tag{3.6a}$$

$$\langle \Phi | b\Psi \rangle = b \langle \Phi | \Psi \rangle. \tag{3.6b}$$

ここで，a, b は任意の複素定数である．これらは内積の定義からすぐに導けるだろう．

---

*1) x の積分領域は (3.3) 式では $-\infty < x < \infty$ としたが，前章の量子力学系のように有限領域 $(a < x < b)$ に制限されているときは，積分を $\int_a^b dx$ に置き換える必要がある．

■コメント■

もし，内積の性質を忘れたときは，内積の定義 (3.3) に戻って確認するとよい．しかし，重要なことは，内積の性質 (3.4) 式および (3.6) 式（＋他の内積の性質）が成り立つことであり，内積自身の定義が何であったかは，多くの場合，知る必要がない．実際，(3.3) 式で定義されたものを内積と呼ぶというよりも，**(3.4) 式および (3.6) 式（＋他の内積の性質）を満たすものを内積と呼ぶ**と理解するのが正しい認識である．

■

3.2.2 エルミート共役とエルミート演算子

内積が定義できたので，任意の演算子 A の**エルミート共役** $A^\dagger$ を定義することができる．

$$\langle A^\dagger \Phi|\Psi\rangle \equiv \langle \Phi|A\Psi\rangle, \quad \text{あるいは,} \quad \langle \Phi|A^\dagger\Psi\rangle \equiv \langle A\Phi|\Psi\rangle. \tag{3.7}$$

上式の関係が演算子 A のエルミート共役 $A^\dagger$ の定義式である．たとえば，微分演算子 $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ のエルミート共役 $D^\dagger$ は，内積の定義を通して次のように得られる．

$$\begin{aligned}
\langle \Phi|D^\dagger\Psi\rangle &\equiv \langle D\Phi|\Psi\rangle \qquad (\because D^\dagger \text{の定義式}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\right)^* \Psi(x) \qquad (\because \text{内積の定義 (3.3)}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (\Phi(x))^* \left(-\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)\right) \qquad (\because \text{部分積分をもちいた})
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (\Phi(x))^* \left(D^\dagger\Psi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (\Phi(x))^* \left(-\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)\right)$$

$$\Longrightarrow D^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

3 番目の等式では，表面項のおつりが出るが，波動関数に対する条件 $\Phi(\pm\infty) = \Psi(\pm\infty) = 0$ を使って落とした*2)．この結果から，微分演算子 D に純虚数 $i\hbar$ がかかった運動量演算子 $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar D$ はエルミート演算子，すなわち，$p^\dagger = p$ であることがわかる．もちろん，これはよく知られた結果である．

エルミート共役の定義から，演算子の積に対するエルミート共役の公式を導くことができる．すなわち，

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \tag{3.8}$$

*2) この条件は波動関数の規格化可能（2 乗可積分）条件から導かれる．また，座標 x の領域が有限 ($a < x < b$) のときは，部分積分の際に現れる表面項に気を付けなければならない．そのときは，単純に表面項をゼロと置くことはできない．波動関数の境界条件を正しく取り入れる必要がある．

≪ (3.8) 式の証明 ≫

これは，次のようにして導くことができる．

$$\langle (AB)^\dagger \Phi|\Psi\rangle \overset{(3.7)}{=} \langle \Phi|(AB)\Psi\rangle = \langle \Phi|A(B\Psi)\rangle \overset{(3.7)}{=} \langle A^\dagger \Phi|B\Psi\rangle$$
$$\overset{(3.7)}{=} \langle B^\dagger A^\dagger \Phi|\Psi\rangle.$$

Q.E.D.

3 つ以上の演算子の積に対しては，公式 (3.8) をくり返し使えば導ける．たとえば，3 つの積のエルミート共役は

$$(ABC)^\dagger = \big(A(BC)\big)^\dagger \overset{(3.8)}{=} (BC)^\dagger A^\dagger \overset{(3.8)}{=} C^\dagger B^\dagger A^\dagger \tag{3.9}$$

となる．4 つ以上の積の公式はもはや自明であろう．よく使われる記法として $\langle \Phi|A|\Psi\rangle$ があるが，それは $\langle \Phi|A\Psi\rangle$ と同じものである．したがって，$A|\Psi\rangle$ と書かれたものと $|A\Psi\rangle$ は同じものだと思ってもらいたい．

エルミート共役を導入できたので，エルミート演算子が定義できる．**エルミート演算子**とは，そのエルミート共役が自分自身と等しい演算子のことである．すなわち，

$$A^\dagger = A\,. \tag{3.10}$$

あるいは，内積をもちいて定義すると，次の関係を満たす演算子をエルミートと呼ぶ．

$$\langle A\Phi|\Psi\rangle = \langle \Phi|A\Psi\rangle. \tag{3.11}$$

3.2.3 エルミート演算子の固有値と固有関数

エルミート演算子が量子力学で特に重要な理由は，その固有値と固有関数が特別な性質を持つからである．エルミート演算子 $A^\dagger = A$ に対して次の関係を満たすとき

$$A\Psi_a(x) = a\Psi_a(x) \tag{3.12}$$

a を**固有値**，$\Psi_a(x)$ を**固有関数**あるいは**固有状態**と呼ぶ．そのとき，固有値 a は実数となる．すなわち，

$$a^* = a\,. \tag{3.13}$$

この性質は，固有値が物理量の測定値に対応するための必要条件である．また，異なる固有値に対応する固有関数は互いに直交するので，固有関数を適当に規格化することによって，任意のエルミート演算子の固有関数は**規格直交系**を張

ることがわかる*3)．

$$\langle \Psi_{a'} | \Psi_a \rangle = \delta_{a'a} \,. \tag{3.14}$$

ここで，$\delta_{a'a}$ はクロネッカーシンボルで，$a' = a$ のときは $\delta_{a'a} = 1$，$a' \neq a$ のときは $\delta_{a'a} = 0$ である．

≪ (3.13) 式と (3.14) 式の証明 ≫

$\langle \Psi_{a'} | A\Psi_a \rangle$ を 2 通りの方法で計算する．

$$\langle \Psi_{a'} | A\Psi_a \rangle \overset{(3.12)}{=} \langle \Psi_{a'} | a\Psi_a \rangle \overset{(3.6b)}{=} a \langle \Psi_{a'} | \Psi_a \rangle \,.$$

一方，エルミート共役の定義をもちいると

$$\langle \Psi_{a'} | A\Psi_a \rangle \overset{(3.7)}{=} \langle A^\dagger \Psi_{a'} | \Psi_a \rangle \overset{A^\dagger = A}{=} \langle A\Psi_{a'} | \Psi_a \rangle \overset{(3.12)}{=} \langle a'\Psi_{a'} | \Psi_a \rangle$$
$$\overset{(3.6a)}{=} (a')^* \langle \Psi_{a'} | \Psi_a \rangle .$$

$a' = a$ のときに上の 2 式が等しいとすると，$a^* = a$ が導かれる．この結果を使って，再び上の 2 式が等しいとおくと，$(a' - a)\langle \Psi_{a'} | \Psi_a \rangle = 0$ が導かれ，$a' \neq a$ ならば，$\langle \Psi_{a'} | \Psi_a \rangle = 0$ でなければならない．あとは，$\langle \Psi_a | \Psi_a \rangle = 1$ となるように，$\Psi_a(x)$ の規格化定数を選べば (3.14) 式が得られる． Q.E.D.

3.2.4 同時固有関数

演算子がいくつかあるときは，**可換な演算子の組**に対して**同時固有関数**を用意することができる．たとえば，2 つの可換な演算子 A, B に対して，それぞれの固有値 a, b をもつ同時固有関数 $\Psi_{a,b}$ が存在する．すなわち，

$$A\Psi_{a,b} = a\Psi_{a,b} \,, \quad B\Psi_{a,b} = b\Psi_{a,b} \,. \tag{3.15}$$

通常，可換な演算子の組の選び方は一意的ではなく任意性がある．**どのような可換なセットを選べばよいかは，どの物理量に興味があるかによって決まる．**量子論は古典論と違って，すべての物理量に対する同時固有関数を持ち込むことはできない*4)．どのような物理量に興味があるかを常に考えながら解析を進める必要がある．

≪ 可換な演算子に対して同時固有関数が存在することの証明 ≫

ここでは固有値に縮退がない場合の証明を与えておく．縮退がある場合の証明は，量子力学の教科書に譲ることにする．

演算子 A, B が可換 $(AB = BA)$ とし，A の固有関数 Ψ_a を導入する．

$$A\Psi_a = a\Psi_a \,. \tag{3.16}$$

上式の両辺に演算子 B をかけて，A と B が可換であることをもちいると

---

*3) 固有値に縮退がある場合は，もう少し詳細な議論を必要とするが，その場合でも (3.14) 式の規格直交系を張るように固有関数を常に選ぶことができる（証明は略）．

*4) たとえば，座標 x と運動量 p のように，可換でない演算子に対する同時固有関数は定義できない．

$$B(A\Psi_a) = B(a\Psi_a) \quad \Longrightarrow \quad A(B\Psi_a) = a(B\Psi_a)$$
$$\Longrightarrow \quad A\Psi_B = a\Psi_B\,, \quad (\Psi_B \equiv B\Psi_a)\,.$$

この式から Ψ_B は，Ψ_a と同じく A の固有関数で固有値 a をもつことがわかる．ここでは固有値の縮退はないとしたのであるから，Ψ_B は (3.16) 式での固有関数 Ψ_a に比例していなければならない．つまり，比例係数を b としておくと $\Psi_B = b\Psi_a$，すなわち，

$$B\Psi_a = b\Psi_a$$

が成り立つことになる．この式は，Ψ_a が B の固有値 b をもつ固有関数であることを意味している．したがって，Ψ_a は演算子 A の固有関数であると同時に，B の固有関数にもなっていることがわかる． Q.E.D.

3.3 最小超対称性関係とその帰結

前章では円周上の自由粒子の量子力学系を考察した．そこでは，3 つのエルミート演算子 $H, Q, (-1)^F$ が導入され，次の最小超対称性関係を満たすことをみた．

最小超対称性関係

$$H = Q^2, \tag{3.17a}$$
$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F, \tag{3.17b}$$
$$\left((-1)^F\right)^2 = 1. \tag{3.17c}$$

これらの関係式は前章の最後にまとめとして書いておいたが，重要な関係式なので，再掲しておくことにした．これらの関係式（あるいは，その変形）は，この本全体を通じて至るところで目にすることになるだろう．上の 3 つの式の中で (3.17c) 式は，$(-1)^F$ の固有値が ± 1 であり，この ± 1 の符号によって状態空間を 2 つのクラスに分類することができると述べているにすぎないので，実質初めの 2 式，すなわち，(3.17a) 式と (3.17b) 式に超対称性のエッセンスが込められていると思ってよい．上式の超対称性関係を「最小」と呼んだ理由は，これ以上式を 1 つでも削ると超対称性が保証されなくなる最小の組合せだからである．別の言葉で言い換えると，超対称性と名の付く理論すべてに共通する性質を抜き出したものが，(3.17) 式の関係なのである．この節と次節を読み終えれば，あなたは超対称性の本質を知ったことになる．

3 つの演算子 $H, Q, (-1)^F$ が，エルミートで最小超対称性関係 (3.17) を満たす限りは，どのような理論であろうとも，次の 4 つの基本的性質*5) に必ず従うことになる．逃れることは決して できない．その意味でこれからの議論は強

*5) これらの性質は量子力学でも場の量子論でも超対称性をもつ理論すべてに共通して成り立つ．

力である．

超対称性の基本的性質

i) エネルギー固有値 E は非負，すなわち，$E \geq 0$.

ii) 正エネルギー ($E > 0$) 固有状態は，$(-1)^F$ の固有値 $+1$ と -1 をもつ状態 $\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ で対をなし，必ずエネルギーの縮退を起こす．

iii) ゼロエネルギー ($E = 0$) 状態は必ずしも縮退するとは限らない．また，ゼロエネルギー解 $\Psi_{E=0}$ は（もし存在するとすれば），$Q\Psi_{E=0} = 0$ を満たす．

iv) ウィッテン指数：$\Delta_W \equiv \mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}$ は位相不変量である．ここで，$\mathcal{N}^\pm_{E=0}$ は，$(-1)^F$ の固有値 ± 1 をもつゼロエネルギー解の数である．

前章では演算子 $H, Q, (-1)^F$ を具体的に与えたが，3.8 節を除いて，この章ではそれらの演算子がどのようなものかを知る必要は全くない．いや，**必要ないからこそ，共通の性質を抜き出すことができる**のだ．では早速，関係式 (3.17) から，超対称性のもつ基本的性質 i) $\sim$ iv) を導くことにしよう．

3.4 基本的性質の導出

前節で述べた基本的性質 i) $\sim$ iv) を以下で順次証明していこう．これから行われる解析は超対称性を理解する上で基本中の基本といえる部分なので，**この節の内容をきちんと理解してから先に進むようにしてほしい**．少々説明がくどくなっている箇所もあるが，なるべく物理的意味を明確にするためにも詳しい解説を心掛けることにした．証明に移る前に，最小超対称性関係から得られる 2 つの重要な関係式

$$[\,H\,,\,Q\,] = 0, \tag{3.18a}$$

$$[\,H\,,\,(-1)^F\,] = 0, \tag{3.18b}$$

を与えておこう．第 1 式はハミルトニアン演算子が $H = Q^2$ と書かれていることから自明だろう．第 2 式は，(3.17b) 式を二度使えば得られる．(3.18) 式から，H と Q，あるいは，H と $(-1)^F$ は可換なので同時固有状態をとれることがわかる．ただし，Q と $(-1)^F$ は可換ではないので，どちらか一方を選ばなければならない．以下の議論では，H と $(-1)^F$ の同時固有状態 $\Psi_{E,\lambda}$ をもちいて超対称性理論のもつ性質 i) $\sim$ iv) を導くことにしよう[*6]．

---

*6) ここでは H と $(-1)^F$ の同時固有状態をとるが，H と Q の同時固有状態に選ぶとどうなるか，気になるところであろう．これに対する解答は，3.5 節での演習問題 3.4 に与えられている．

$$H\Psi_{E,\lambda} = E\Psi_{E,\lambda}\,, \tag{3.19}$$

$$(-1)^F\Psi_{E,\lambda} = \lambda\Psi_{E,\lambda}\,, \quad (\lambda = \pm 1). \tag{3.20}$$

簡単のため，これらの固有状態は規格化されているとしておく．

$$\langle \Psi_{E,\lambda} | \Psi_{E,\lambda} \rangle = 1. \tag{3.21}$$

3.4.1 性質 i) の導出

エネルギー固有値 E は非負，すなわち，$E \geq 0$.

エネルギー固有値 E が非負 ($E \geq 0$) であることは，ハミルトニアン演算子が $H = Q^2$ と表されていることから導かれる．このとき，超電荷 Q がエルミート演算子 ($Q^\dagger = Q$) であることが重要である．Ψ_E をエネルギー E の規格化された固有状態 ($H\Psi_E = E\Psi_E$, $\langle \Psi_E | \Psi_E \rangle = 1$)*7) として，次の不等式が成り立つ．

$$E = \langle \Psi_E | H | \Psi_E \rangle \overset{(3.17\mathrm{a})}{=} \langle \Psi_E | Q^2 | \Psi_E \rangle \overset{(3.7)}{=} \langle Q\Psi_E | Q\Psi_E \rangle \geq 0\,. \tag{3.22}$$

ここで 3 番目の等式では $Q^\dagger = Q$，最後の不等式では (3.4a) 式の関係をもちいた．上式より，エネルギー固有値 E が非負であることがわかる．もし，この手の議論に精通しているならば，『$H = Q^2 \overset{Q^\dagger = Q}{\longrightarrow} E \geq 0$』と書いて終わるところだ．

■ コメント ■

エルミート共役 † は複素共役 ∗ を一般化した概念で，エルミート演算子 ($Q^\dagger = Q$) は実数 ($z^* = z$) を拡張したものである．z が実数ならば $z^2 \geq 0$ が成り立つように，Q がエルミート演算子ならば同様の不等式が成り立つ．このとき，ついつい $Q^2 \geq 0$ と書きたくなるが，これは正しい関係式ではない．これは学生がよく犯す間違いだ．Q^2 はあくまでも演算子であり通常の数ではないので，そのままでは普通の数と同じ不等号を使うことはできない．不等号は実数値に対して使えるものなので，Q^2 自身ではなく，$Q^2 = H$ の固有値 E，あるいは，期待値 $\langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle$ に対して成り立つ次の不等式：$E \geq 0$，および，$\langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle \geq 0$ が正しい関係式である．

■

演習問題 3.1　任意の演算子 Q に対して，$Q^\dagger Q$ はエルミートで，かつ，固有値はゼロまたは正であることを証明せよ．

ヒント： $Q^\dagger Q$ がエルミートであることは，$(Q^\dagger Q)^\dagger = Q^\dagger Q$ を確かめればよい．$Q^\dagger Q$ の固有値がゼロまたは正であることを証明するには，$Q^\dagger Q$ の固有

*7) $(-1)^F$ の固有値 λ はここでは重要でないので省略した．

値と固有関数を λ と Ψ_λ として，$\lambda = \langle \Psi_\lambda | Q^\dagger Q | \Psi_\lambda \rangle \geq 0$ を示せばよい．

3.4.2 性質 ii) の導出

> 正エネルギー ($E > 0$) 固有状態は，$(-1)^F = +1$ と -1 をもつ状態 $\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ で対をなし，必ずエネルギーの縮退を起こす．

固有状態 $\Psi_{E,+}$ から出発して，それに Q を作用した状態 $Q\Psi_{E,+}$ が H と $(-1)^F$ のどのような固有値をもつか調べてみよう．

$$H\,(Q\Psi_{E,+}) \overset{(3.18\text{a})}{=} QH\Psi_{E,+} \overset{(3.19)}{=} E\,(Q\Psi_{E,+}), \tag{3.23}$$

$$(-1)^F\,(Q\Psi_{E,+}) \overset{(3.17\text{b})}{=} -Q(-1)^F\Psi_{E,+} \overset{(3.20)}{=} -(Q\Psi_{E,+}). \tag{3.24}$$

この関係式から，$Q\Psi_{E,+}$ は固有値 $H = E$, $(-1)^F = -1$ をもつので，固有状態 $\Psi_{E,-}$ に比例していることがわかる．逆に，$\Psi_{E,-}$ から出発すると，$Q\Psi_{E,-} \propto \Psi_{E,+}$ が結論づけられる．比例係数の位相をうまく選ぶと，$\Psi_{E,\pm}$ は Q を通じて次の**超対称性関係 (supersymmetric relation)** で結びつけられていることがわかる．

超対称性関係

$$Q\Psi_{E,+} = \sqrt{E}\Psi_{E,-}, \tag{3.25a}$$

$$Q\Psi_{E,-} = \sqrt{E}\Psi_{E,+}. \tag{3.25b}$$

■ コメント ■

上式は $\Psi_{E,\pm}$ が上の関係でお互い結びついていると解釈してもよいし，$\Psi_{E,+}$ が得られたとしたら，対となる $\Psi_{E,-}$ を (3.25a) 式によって，あるいは，$\Psi_{E,-}$ が得られたとしたら，対となる $\Psi_{E,+}$ を (3.25b) 式によって求めることができると理解してもよい．

■

このとき，$\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ は**超多重項 (supermultiplet)** をなすという．これらの関係式は，下のように図式的に表したほうがずっと理解しやすいだろう．

$$\Psi_{E,-} \overset{Q}{\longleftrightarrow} \Psi_{E,+} \qquad (E \neq 0). \tag{3.26}$$

$E = 0$ のときは (3.25) 式の右辺がゼロになるので，(3.26) 式の対応関係は成り立っていないことに注意しておこう．(3.25) 式の係数 $\sqrt{E}$ は，次のようにして決めることができる．まず，$Q\Psi_{E,+} = c_E\Psi_{E,-}$ とおいて，両辺のノルムを計算すると

$$\langle Q\Psi_{E,+}|Q\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle \quad (\because \text{右辺では (3.6) 式をもちいた})$$

$$\stackrel{(3.7)\,\&\,Q^\dagger=Q}{\Longrightarrow} \quad \langle\Psi_{E,+}|Q^2\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle$$

$$\stackrel{H=Q^2}{\Longrightarrow} \quad E\,\langle\Psi_{E,+}|\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle$$

$$\stackrel{(3.21)}{\Longrightarrow} \quad c_E = \sqrt{E}\,e^{i\theta} \qquad (\theta\text{は任意の実数}) \tag{3.27}$$

となる．位相 $e^{i\theta}$ は $\Psi_{E,-}$ の規格化の定義に吸収することができるので，$e^{i\theta}\,\Psi_{E,-}$ をあらためて $\Psi_{E,-}$ と書くことにすれば，(3.25a) 式を得る．(3.25b) 式の関係は，(3.25a) 式の両辺に Q をかけ，$H = Q^2$ をもちいることによって，(3.25a) 式から自動的に得られる．(つまり，(3.25a) 式，あるいは，(3.25b) 式のどちらか一方が決まれば，他方は自動的に成り立つ.)

演習問題 3.2　$\Psi_{E,\pm}$ は次の規格直交関係を満たす．

$$\langle\Psi_{E,\lambda}|\Psi_{E',\lambda'}\rangle = \delta_{EE'}\,\delta_{\lambda\lambda'}\,.$$

このとき，固有関数の位相を $\Psi_{E,\lambda}(x) \to \widetilde{\Psi}_{E,\lambda}(x) \equiv e^{i\theta_{E,\lambda}}\,\Psi_{E,\lambda}(x)$ と定義し直しても，上の規格直交関係は変わらないこと，すなわち，$\langle\widetilde{\Psi}_{E,\lambda}|\widetilde{\Psi}_{E',\lambda'}\rangle = \delta_{EE'}\,\delta_{\lambda\lambda'}$ を確かめよ．ただし，$\theta_{E,\lambda}$ は E, λ に依存してもいいが，x にはよらない実定数である.(このことは，固有関数の定義には位相の不定性が常にあることを意味する．この不定性は量子力学固有のもので物理に影響しない.)

3.4.3　性質 iii) の導出

> ゼロエネルギー ($E = 0$) 状態は必ずしも縮退するとは限らない．また，ゼロエネルギー解 $\Psi_{E=0}$ は（もし存在するとすれば），$Q\Psi_{E=0} = 0$ を満たす．

3.4.2 節で指摘したように，対応関係 (3.26) はゼロエネルギー ($E = 0$) 状態には当てはまらない．実際，$E = 0$ の場合，(3.25) 式から

$$Q\Psi_{E=0,\pm} = 0\,, \tag{3.28}$$

となり，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0,\pm}$ に超電荷 Q をかけても，新たな状態を作りださない．すなわち，

$$\Psi_{E=0,-} \stackrel{Q}{\longrightarrow} 0 \stackrel{Q}{\longleftarrow} \Psi_{E=0,+}\,. \tag{3.29}$$

したがって，$\Psi_{E=0,+}$ と $\Psi_{E=0,-}$ は（もし存在していても）超電荷 Q を通じて超対称変換で対をなすことはない．これは，$E \neq 0$ の場合と対比すべき性質である．このことは，$(-1)^F = +1$ をもつゼロエネルギー状態の数 $\mathcal{N}^{+}_{E=0}$ と

$(-1)^F = -1$ をもつゼロエネルギー状態の数 $\mathcal{N}_{E=0}^-$ は必ずしも等しいとは限らないことを意味する[*8)]．一方，正エネルギー状態に関しては超対称性関係を通じて $\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ が対をなすので，それぞれの状態数は常に等しい．すなわち，$\mathcal{N}_E^+ = \mathcal{N}_E^-$ $(E > 0)$．このように，ゼロエネルギー状態は正エネルギー状態とは異なる性質をもつ．

ゼロエネルギー状態は超多重項を組まないという性質以外にも，それが満たす方程式にも顕著な特徴がみられる．エネルギー固有状態 $\Psi_{E,\pm}$ は固有値方程式 $H\Psi_{E,\pm} = E\Psi_{E,\pm}$ の解として与えられるが，ゼロエネルギー解の場合は，(3.28) 式も同時に満たさなければならない．ハミルトニアン H は座標 x の 2 階微分演算子であることを思い出すと，$H = Q^2$ で与えられる超電荷 Q は 1 階微分演算子と考えられる．したがって，ゼロエネルギー状態は，シュレディンガー型の 2 階微分方程式ではなく，(3.28) 式の 1 階微分方程式の解で与えられることになる[*9)]．ゼロエネルギー解については，次章のウィッテン模型で具体的に求めることにする．

演習問題 3.3　1 次元調和振動子のハミルトニアンは，生成・消滅演算子 $a^\dagger$, a をもちいて $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ と与えられる．このとき，エネルギー固有値 E に対する不等式 $E \geq \frac{\hbar\omega}{2} \equiv E_0$ を導き，最低エネルギー状態 $\psi_{E_0}(x)$ は 1 階微分方程式 $a\,\psi_{E_0}(x) = 0$ にしたがうことを示せ．

ヒント: 演習問題 3.1 を参照せよ．

3.4.4　性質 iv) の導出

> ウィッテン指数：$\Delta_W \equiv \mathcal{N}_{E=0}^+ - \mathcal{N}_{E=0}^-$ は位相不変量である．ここで，$\mathcal{N}_{E=0}^\pm$ は，$(-1)^F = \pm 1$ をもつゼロエネルギー解の数である．

ウィッテン指数 (Witten index) Δ_W は $\Delta_W \equiv \mathcal{N}_{E=0}^+ - \mathcal{N}_{E=0}^-$ で定義される整数値をとる量である[*10)]．ここで，$\mathcal{N}_{E=0}^\pm$ は固有値 $(-1)^F = \pm 1$ をもつゼロエネルギー状態の数である．この量が**位相不変量 (topological invariant)**

*8)　ゼロエネルギー解 $\Psi_{E=0,+}$ および $\Psi_{E=0,-}$ がそれぞれいくつずつ存在するかは，具体的に $H, Q, (-1)^F$ を与えないと決まらない．したがって，最小超対称性関係 (3.17) だけからは，$\mathcal{N}_{E=0}^+$ と $\mathcal{N}_{E=0}^-$ に対する制限は出てこない．

*9)　実は，この性質は 1 次元量子力学系での基底状態のもつ一般的性質でもある．5.2 節で詳しく論ずることにする．

*10)　数学的に厳密なことを言うと，ここではゼロエネルギー $E_0 = 0$ と第 1 励起状態 E_1 の間には有限のエネルギーギャップ $\Delta\mathcal{E}$ がある $(E_1 - E_0 = \Delta\mathcal{E} > 0)$ と暗に仮定した．もし，エネルギーギャップがなく $(\Delta\mathcal{E} = 0)$，$E = 0$ から連続スペクトラムが始まるとすると，ゼロエネルギー状態と第 1 励起状態を分離することが難しくなる．その場合は，$\mathcal{N}_{E=0}^\pm$ を数学的にきちんと定義するために，たとえば，座標 x の範囲を有限領域に制限するなどして，エネルギースペクトラムを離散化する必要がある．

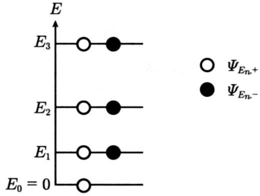


図 3.1　典型的な超対称性理論のエネルギースペクトラム：i) $E \geq 0$, ii) $E = 0$ を除いて $\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ で超多重項を組み，エネルギーの縮退を起こす．iii) $E = 0$ の状態は必ずしも縮退しない．この例では $\mathcal{N}^+_{E=0} = 1, \mathcal{N}^-_{E=0} = 0$ である．

であるという事実は，物理だけでなく数学的にも超対称性理論を興味深いものにしている理由の一つである．この主張はかなり非自明なものなので，「位相不変量」の言葉の意味も含めて詳しく説明しておこう．「ウィッテン指数 Δ_W が位相不変量である」という主張は，ここでは「エネルギーの漸近的振る舞いを変えない限り[*11)]，理論に含まれる任意のパラメータ[*12)] を連続的に変えても Δ_W の値は不変である」ことを意味する．このことを以下で示すことにしよう．

3.4.2 節と 3.4.3 節で $E > 0$ のときは $(-1)^F = \pm 1$ の状態間で必ず縮退が起こるが，$E = 0$ のときは必ずしも縮退が起きるとは限らないことをみた（図 3.1 参照）．理論に含まれているパラメータを連続的に変化させると，$(-1)^F = +1$ と -1 の間で縮退していた $E > 0$ の超多重項のエネルギーが下がって，$E = 0$ まで降りてくることもあるだろう．逆に $E = 0$ の状態が正のエネルギーをもって $E > 0$ の状態になったりもするだろう．しかし，このときは必ず $(-1)^F = +1$ と -1 の状態で対（超多重項）を組んで $E > 0$ の状態にならなければならない．この様子を模式的に表したものが図 3.2 である．図 3.2(a) と (c) をみるとわかるように，ゼロエネルギー状態数の総和 $\mathcal{N}^+_{E=0} + \mathcal{N}^-_{E=0}$ はパラメータの変化によって変わりうるが，その差 $\mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}$ は変化することがない．これは，$E > 0$ の状態は必ず $(-1)^F = +1$ と -1 の間で超多重項を組まねばならず，この組合せは，差 $\mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}$ を変化させないからである．

このように，連続的なパラメータの変化によってウィッテン指数 Δ_W は不変であることがわかる．すなわち，位相不変量である．ここでパラメータの連続変形の際に暗に仮定していたことは，エネルギー固有状態がパラメータの変化で突然無くなったり，逆に現れたりしないということである．この仮定は，エネルギーの漸近的振る舞いを変えないという要請と同じである．不連続な状態

*11)　「エネルギーの漸近的振る舞いを変えない」とは，パラメータを連続的に変えていったときに，エネルギー固有状態が突然無くなったり現れたりしないことを指す．

*12)　ここでいうパラメータとは，例えば，粒子の質量，結合定数の大きさ，プランク定数 $\hbar$，円周の半径等，理論に含まれているパラメータ全般を指す．

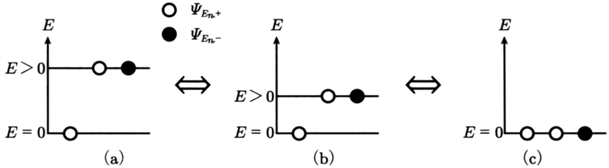


図 3.2　ゼロエネルギー状態の数は，(a) $\mathcal{N}^+_{E=0} = 1, \mathcal{N}^-_{E=0} = 0$, (b) $\mathcal{N}^+_{E=0} = 1, \mathcal{N}^-_{E=0} = 0$, (c) $\mathcal{N}^+_{E=0} = 2, \mathcal{N}^-_{E=0} = 1$. 理論のパラメータを連続的に変化させることによって，$E > 0$ の状態が $E = 0$ に降りてくることもあるだろうし ((a) → (b) → (c))，逆に $E = 0$ の状態が $E > 0$ の状態になることもある ((c) → (b) → (a))．このとき，$E > 0$ の状態は $(-1)^F = \pm 1$ の間で超多重項を組まなければならないので，$\mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}$ は決して変化しない．

変化が起こると上の証明は成り立たないので，この要請は必要である．位相不変量がどういうものか上の説明でピンとこなかったときは，次のコメントを読んでみるとよい．理解の助けになるだろう．次の章で具体的にウィッテン指数がパラメータの変化に対して不変であるのをみるので，ここで位相不変量の意味がよくわからなくても心配は要らない．ご安心を．

■コメント■

『トポロジスト（位相幾何学を研究している人）とは，ドーナツとコーヒーカップの違いがわからない人のことである.』

位相幾何学（トポロジー）では，連続的になめらかに変形してお互い移り合うものは同一視される．図 3.3 のドーナツと取っ手の付いたコップはその一例である．連続変形によって変わらない量のことを位相不変量 (topological invariant) と呼ぶ．図 3.3 の例では，穴の数 (= 1) が連続変形しても変わらない位相不変量である．トポロジーにより親しんでもらうために，図 3.4 をみてもらおう．左の物体を連続変形していって，右の形にもっていってほしい．そのとき，自由に伸び縮みさせてかわまわないが，変形の際に無理矢理引きちぎったり勝手にくっ

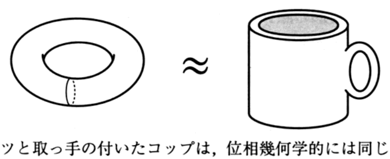


図 3.3　ドーナツと取っ手の付いたコップは，位相幾何学的には同じものである．この 2 つが同じものに見えたら，あなたも立派なトポロジスト！

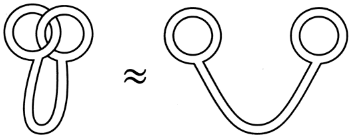


図 3.4 にわかには信じられないかもしれないが，この 2 つの 3 次元物体は互いに連続変形可能である．この物体は，柔らかい棒の両端に吊り輪を 1 つずつくっつけたようなもので，引きちぎったり勝手にくっつけたりしない限り自由に変形してかまわない．

つけたりしてはならない．一見すると，この 2 つの物体がお互い連続変形可能だとは思えないだろう．かなり頭の柔軟性が要求される難問だ．トポロジーの世界を楽しんでみよう．(答えは章末の図 3.5 参照)

3.5 超対称性理論に現れる重要な関係式の物理的意味

前節では (3.17a) 式 ~ (3.17c) 式から超対称性理論のもつ重要な性質 i) ~ iv) をすべて導いた．少々説明が長かったので，頭の中で整理が追いついていないかもしれない．そこで今一度理解を深めるために，これまで出てきた式で重要と思われるものをピックアップして，それらの式の物理的意味を簡単にまとめておくことにする．式の下に書かれている説明がすぐに頭の中に思い描けるなら，超対称性の本質をあなたは理解したことになる．

- $H = Q^2$.
  ハミルトニアン H と超電荷 Q のこの関係は超対称性理論の特徴の一つである[*13]．このとき，Q がエルミート演算子であることは重要である．そしてそのとき，エネルギー固有値 E に対して $E \geq 0$ の関係を導ける．また，この表式からエネルギーの下限値，すなわち，$E = 0$ は特別な状態であることがわかる．一般にエネルギー固有状態 Ψ_E は $H\Psi_E = E\Psi_E$ にしたがうが，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ は $H = Q^2$ と表されていることから，より強い条件 $Q\Psi_{E=0} = 0$ にしたがう．ハミルトニアンは座標の 2 階微分演算子であることを思い出すと，Q は 1 階微分演算子となるので，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ は 1 階微分方程式の解として与えられることがわかる．

- $[H, Q] = 0$，あるいは，$HQ = QH$.
  この関係は $H = Q^2$ から直ちに得られる．H と Q は可換なので，Q はエネルギー固有値を変えない．つまり，Ψ_E がエネルギー E の固有状態ならば，$Q\Psi_E$ も（ゼロでない限り）同じエネルギー E の固有状態である．す

*13) 次節で拡張した関係式を与えるが，本質的にはこの式と同等の内容を含んでいる．

なわち，$H\Psi_E = E\Psi_E \;\Rightarrow\; H(Q\Psi_E) = E(Q\Psi_E)$．また，$H$ と Q が可換ということは Q は時間によらない保存量であり，望むなら，H と Q の同時固有状態をとることもできる．(前節では H と Q ではなく，H と $(-1)^F$ の同時固有状態を選んだ．)

- $[\,H\,,(-1)^F\,] = 0$，あるいは，$H(-1)^F = (-1)^F H$.
  この関係は $H = Q^2$ と $(-1)^F Q = -Q(-1)^F$ から導かれる．H と $(-1)^F$ が可換ということは，それらの同時固有状態がとれることを意味する．また，$(-1)^F$ がハミルトニアン H と可換なので，$(-1)^F$ も保存量である．

- $\{\,(-1)^F\,,Q\,\} = 0$，　あるいは，$(-1)^F Q = -Q(-1)^F$.
  右辺のマイナス符号が重要である．この関係式から Q は $(-1)^F$ の固有値の符号を変える作用をもつ．つまり，$(-1)^F$ の固有状態を $(-1)^F\Psi_\pm = \pm\Psi_\pm$ としておくと，$\Psi_\pm$ に Q をかけた状態は，$(-1)^F(Q\Psi_\pm) = \mp(Q\Psi_\pm)$ を満たす．したがって，$Q\Psi_\pm$ は $(-1)^F = \mp 1$ の固有状態であることがわかる．1 つ前の段落での結果と合わせると，超電荷 Q はエネルギー固有値を変えないが，$(-1)^F$ の符号を変える演算子であることがわかる．すなわち，

$$\Psi_{E,-} \overset{Q}{\longleftrightarrow} \Psi_{E,+} \qquad (E \neq 0). \tag{3.30}$$

よって，$\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ は $E \neq 0$ の場合，Q を通して超多重項の対を作ることになる．一方，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0,\pm}$ に対しては

$$\Psi_{E=0,-} \overset{Q}{\longrightarrow} 0 \overset{Q}{\longleftarrow} \Psi_{E=0,+}\,, \tag{3.31}$$

となり，それらは Q を通して対を作ることはない．これらの結果は図 3.1 にコンパクトにまとめられている．

演習問題 3.4　H と Q は可換なので同時固有状態を定義できる．

$$H\,\Psi_{E,q}(x) = E\,\Psi_{E,q}(x), \quad Q\,\Psi_{E,q}(x) = q\,\Psi_{E,q}(x).$$

このとき，状態 $(-1)^F\Psi_{E,q}$ に対する H と Q の固有値が E と $-q$ であることを確かめよ．また，$q = \pm\sqrt{E}$ であることを示し，$E > 0$ ならばエネルギーの縮退が起きることを確かめよ．しかしながら，$\Psi_{E,q}$ からは，ウィッテン指数 Δ_W が定義できないことを論ぜよ．

3.6　$N = 2$ 超対称性代数

これまで超対称性理論に現れる関係式として (3.17a) 式 ~ (3.17c) 式を考えてきた．この 3 つの式から必要とされる式はすべて得られるので，これら 3 つ

の関係式が最も基本的ということができる．(3.17) 式の物理的な意味づけもはっきりしているので，このままで不都合は無いように思えるが，超対称性の拡張を考えるとよりエレガントな表式が存在する．それを以下で紹介しよう．

3.6.1　実超電荷による $N=2$ 超対称性代数の表現

まず，Q と $(-1)^F$ の組合せを使って，2 つの超電荷 Q_i $(i=1,2)$ を次のように定義する．

$$Q_1 \equiv Q, \tag{3.32a}$$

$$Q_2 \equiv -iQ(-1)^F. \tag{3.32b}$$

これら 2 つの超電荷 Q_i $(i=1,2)$ はともにエルミート演算子である．

$$(Q_i)^\dagger = Q_i\,, \qquad (i=1,2). \tag{3.33}$$

≪ $(Q_i)^\dagger = Q_i$ の証明 ≫

Q_1 は Q がエルミートであることから自明なので，Q_2 のエルミート性を確かめておく．

$$(Q_2)^\dagger = (-iQ(-1)^F)^\dagger = +i(-1)^F Q = -iQ(-1)^F = Q_2. \tag{3.34}$$

ここで，2 番目の等式では公式 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$，および，$Q$, $(-1)^F$ がともにエルミート演算子であること，3 番目の等式では Q と $(-1)^F$ が反可換 $(-1)^F Q = -Q(-1)^F$ であることをもちいた．　Q.E.D.

ここで定義した Q_1 と Q_2 はハミルトニアン H と次の **$N=2$ 超対称性代数 ($N=2$ supersymmetry algebra)** と呼ばれる関係式を満たすことがわかる．

$N=2$ 超対称性代数 —実超電荷による表現—

$$\{\,Q_i\,,\,Q_j\,\} = 2H\delta_{ij}, \tag{3.35a}$$

$$[\,H\,,\,Q_i\,] = 0, \qquad (i,j=1,2). \tag{3.35b}$$

ただし，Q_i はエルミート超電荷 ${Q_i}^\dagger = Q_i$ $(i=1,2)$ である．

ここで N はエルミート超電荷 Q_i の個数に対応する．今の場合は $N=2$ である．

≪ (3.35) 式の証明 ≫

関係式 (3.35a) 式と (3.35b) 式は具体的に次のように確かめられる．まず，(3.35a) 式を成分ごとに書き下すと

$$(Q_1)^2 = (Q_2)^2 = H, \tag{3.36a}$$

$$\{\,Q_1\,,\,Q_2\,\} = 0, \tag{3.36b}$$

となる．(3.35a) 式は上の二式と等価なので，(3.36) 式を以下で導く．

$$
\begin{aligned}
(Q_1)^2 &\overset{(3.32a)}{=} Q^2 = H, \\
(Q_2)^2 &\overset{(3.32b)}{=} (-iQ(-1)^F)(-iQ(-1)^F) \\
&= Q^2 \qquad (\because Q(-1)^F = -(-1)^F Q,\ \text{および},\ ((-1)^F)^2 = 1) \\
&= H, \\
\{Q_1\,,\, Q_2\} &= Q_1Q_2 + Q_2Q_1 \overset{(3.32)}{=} Q(-iQ(-1)^F) + (-iQ(-1)^F)Q \\
&= -iQ^2(-1)^F + iQ^2(-1)^F \qquad (\because Q(-1)^F = -(-1)^F Q) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(3.35b) 式は，(3.36a) 式の関係から明らかであろう． **Q.E.D.**

---

2 つの演算子 $Q, (-1)^F$ をもちいて 2 つの超電荷 Q_i $(i = 1, 2)$ を導入したのであるから，3 つの演算子 $H, Q, (-1)^F$ からなる最小超対称性代数 (3.17) と 3 つの演算子 H, Q_i からなる $N = 2$ 超対称性代数 (3.35) は本質的に等価な内容をもつ．しかしながら，実際の解析では $N = 2$ 超対称性代数 (3.35) に演算子 $(-1)^F$ を加えて，次の関係式をセットで考えると便利である．

$$[H\,,\,(-1)^F] = 0, \tag{3.37a}$$

$$\{(-1)^F\,,\,Q_i\} = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{3.37b}$$

$$((-1)^F)^2 = 1. \tag{3.37c}$$

これらの関係式 (3.37) は，超電荷 Q_i で結びつく超多重項が，$(-1)^F$ の異なる固有値 $+1$ と -1 をもつことを保証してくれる．ここで，H, Q_1, Q_2 に加えて新たに独立な演算子 $(-1)^F$ を導入したとみなすべきではないということを強調しておく．実際，$(-1)^F$ は H, Q_1, Q_2 と次の関係で結びついている．

$$iQ_1Q_2 = H(-1)^F. \tag{3.38}$$

上式の導出は，$Q_1 = Q, Q_2 = -iQ(-1)^F, H = Q^2$ からほぼ自明であろう．

最後に $N = 2$ 超対称性代数の拡張について簡単に述べておこう．(3.35) 式で定義した $N = 2$ 超対称性代数を，任意の正の整数 N をもつ超対称性代数に拡張することは自然であろう．

$$\{Q_i\,,\,Q_j\} = 2H\delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N). \tag{3.39}$$

この代数は**拡張された N 超対称性代数**と呼ばれる．右辺は更に**中心電荷 (central charge)** と呼ばれる付加項 Z_{ij} を加えることができるが[2]，ここではこれ以上深入りしないことにする．

■ コメント ■

この節の前半で示したように，Q と $(-1)^F$ を組み合わせることによって超対称性は $N = 1$ から $N = 2$ に持ち上がるので，超対称量子力学の場合は $N = 2$ 以上を考えることになる．

■

3.6.2 複素超電荷による $N = 2$ 超対称性代数の表現

次に，(3.35) 式とは別の（等価な）表現への書き換えを考えてみよう．後の解析ではそのほうが便利であることがわかる．エルミート超電荷 Q_i $(i = 1, 2)$ の代わりに，(エルミートではない) 複素超電荷 $\mathcal{Q}$ を導入しよう[*14]．

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2), \tag{3.40a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2). \tag{3.40b}$$

この複素超電荷 $\mathcal{Q}$ をもちいると $N = 2$ 超対称性代数 (3.35) は次のように書き換えられる．

$N = 2$ 超対称性代数 —複素超電荷による表現—

$$\{ \mathcal{Q}^\dagger , \mathcal{Q} \} = 2H, \tag{3.41a}$$

$$\{ \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \} = \{ \mathcal{Q}^\dagger , \mathcal{Q}^\dagger \} = 0, \tag{3.41b}$$

$$[H , \mathcal{Q}] = [H , \mathcal{Q}^\dagger] = 0. \tag{3.41c}$$

上式の証明は，(3.40) 式を使って $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ を $Q_i \, (i = 1, 2)$ に書き直して，$H = (Q_1)^2 = (Q_2)^2$，および，$\{Q_1, Q_2\} = 0$ をもちいれば簡単に導くことができる．関係式 (3.41b) は次のように書いたほうがその特徴がよりはっきりする．

$$\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0. \tag{3.42}$$

この関係は**ベキ零性 (nilpotent)** と呼ばれ，複素超電荷の重要な性質である．

■ コメント ■

- このベキ零性は，ゲージ理論や超弦理論の量子化において，非常に重要な役割を果たすことが知られている．そのとき，超電荷に対応する量は BRS 電荷と呼ばれている．また，数学でもベキ零性は，微分形式や de Rham コホモロジーなどいろんな分野で重要な役割を持つ．ゲージ理論の BRS 量子化については文献 [3]，微分形式については文献 [6], [7]，de Rham コホモロジーは文献 [8] が参考になるだろう．
- ベキ零性 (3.42) は奇妙な性質にみえるが，行列をもちいると簡単に実現することができる．たとえば，次の 2×2 行列 $\sigma_\pm$ は，

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

*14) エルミート（実）超電荷に対してはイタリック体 Q，複素超電荷に対してはスクリプト体（筆記風体）$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ を使う．紛らわしいが，間違えないようにしてほしい．

容易に確かめられるようにベキ零性 $(\sigma_+)^2 = (\sigma_-)^2 = 0$ を満たす. ■

複素超電荷による $N=2$ 超対称性代数 (3.41) は，実超電荷による表現 (3.35)，あるいは，最小超対称性関係 (3.17) と本質的に等価である．しかしながら，3.6.1 節での実超電荷の場合と同様に，実際の解析では超対称性代数 (3.41) に演算子 $(-1)^F$ を加えて，次の関係式とセットで考えると便利である．

$$[H, (-1)^F] = 0, \tag{3.44a}$$

$$\{(-1)^F, \mathcal{Q}\} = \{(-1)^F, \mathcal{Q}^\dagger\} = 0, \tag{3.44b}$$

$$((-1)^F)^2 = 1. \tag{3.44c}$$

3.6.1 節で述べたのと同様に，演算子 $(-1)^F$ を $H, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ とは独立に導入したと考えるべきではないということを強調しておく．実際，$(-1)^F$ は $H, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ と次の関係式で結びついている．

$$\frac{1}{2}\big(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger\big) = H(-1)^F. \tag{3.45}$$

これは，(3.38) 式と $\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger = 2iQ_1Q_2$ から導かれる．(3.41) 式，および，(3.44) 式の物理的意味については，次節で詳しく議論する．

3.7 複素超電荷による超対称性の実現

理解を深めるための一つの良い方法は，同じ結果を異なる切り口からもう一度導き直すことである．一つの理解の仕方だけで満足してしまっては，その理解は浅いものに留まってしまう．この節では，3.4 節で行った実超電荷 Q と $H, (-1)^F$ を使った解析を，複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ および $H, (-1)^F$ をもちいて再考する．超対称性の新しい側面が見えてくるだろう．

3.7.1 性質 i) の導出

エネルギー固有値 E が非負 $(E \geq 0)$ であることは，ハミルトニアン演算子が $2H = \{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = \mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger$ と表されていることから導かれる．ハミルトニアンの固有値 E に属する（規格化された）固有状態を Ψ_E としておくと，3.4 節での証明と同じように $E \geq 0$ が次のようにして導かれる．

≪ $E \geq 0$ の証明 ≫

$$\begin{aligned}
2E &= \langle\Psi_E|2H|\Psi_E\rangle = \langle\Psi_E|(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger)|\Psi_E\rangle \\
&= \langle\Psi_E|\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}|\Psi_E\rangle + \langle\Psi_E|\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger|\Psi_E\rangle \\
&\overset{(3.7)}{=} \langle\mathcal{Q}\Psi_E|\mathcal{Q}\Psi_E\rangle + \langle\mathcal{Q}^\dagger\Psi_E|\mathcal{Q}^\dagger\Psi_E\rangle \\
&\geq 0. \qquad (\because \text{内積の性質 (3.4a)} : \langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

したがって，エネルギー固有値 E が非負 ($E \geq 0$) であることがわかる．$Q^\dagger Q$，および，$QQ^\dagger$ の形を見た瞬間に，この結論が頭に浮かばなければならない．これはそれほど難しいことではないはずだ．なぜなら，複素数 z の場合，$z^*z \geq 0$, $zz^* \geq 0$ はお馴染みの不等式のはずだからだ．$E \geq 0$ の結果は，複素数の場合を演算子の固有値へ拡張したものに過ぎない．

■ コメント ■

前にも注意したが，$Q^\dagger Q, QQ^\dagger$ は演算子であり普通の数ではないので，くれぐれも $Q^\dagger Q \geq 0$, $QQ^\dagger \geq 0$ などとは書かないように！　任意の状態 Ψ ではさんだ期待値に対して，$\langle\Psi|Q^\dagger Q|\Psi\rangle \geq 0$, $\langle\Psi|QQ^\dagger|\Psi\rangle \geq 0$, あるいは，$\langle\Psi|(Q^\dagger Q + QQ^\dagger)|\Psi\rangle \geq 0$ と書くのが正しい．■

3.7.2 性質 ii) の導出

前と同様に，$H, (-1)^F$ の同時固有状態 $\Psi_{E,\pm}$ を導入する．

$$H\Psi_{E,\pm} = E\Psi_{E,\pm}\,, \tag{3.46a}$$

$$(-1)^F\Psi_{E,\pm} = \pm\Psi_{E,\pm}\,. \tag{3.46b}$$

ここでの目的は，次の関係を示すことである．

$$0 \underset{Q}{\longleftarrow} \Psi_{E,-} \underset{Q}{\overset{Q^\dagger}{\rightleftarrows}} \Psi_{E,+} \overset{Q^\dagger}{\longrightarrow} 0 \qquad (E > 0)\,. \tag{3.47}$$

(3.46) 式の定義から，$\Psi_{E,\pm}$ は次の関係を満たすことが導ける．

$$Q^\dagger\Psi_{E,+} = 0, \tag{3.48a}$$

$$Q\Psi_{E,-} = 0. \tag{3.48b}$$

≪ (3.48) 式の証明 ≫

$$(-1)^F\Psi_{E,+} = +\Psi_{E,+}$$

上式の両辺に $2H$ をかけて (3.45) 式をもちいると

$$\Longrightarrow\ (Q^\dagger Q - QQ^\dagger)\Psi_{E,+} = 2H\Psi_{E,+}$$

$$\Longrightarrow\ (\underbrace{Q^\dagger Q + QQ^\dagger}_{2H} - 2QQ^\dagger)\Psi_{E,+} = 2E\Psi_{E,+}$$

$$\Longrightarrow\ QQ^\dagger\Psi_{E,+} = 0$$

$$\Longrightarrow\ \langle\Psi_{E,+}|QQ^\dagger\Psi_{E,+}\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow\ \langle Q^\dagger\Psi_{E,+}|Q^\dagger\Psi_{E,+}\rangle = 0 \qquad (\because \langle\Phi|A\Psi\rangle = \langle A^\dagger\Phi|\Psi\rangle)$$

$$\Longrightarrow\ Q^\dagger\Psi_{E,+} = 0 \qquad (\because \langle\Phi|\Phi\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \Phi = 0)$$

同様にして，$(-1)^F\Psi_{E,-} = -\Psi_{E,-} \Longrightarrow Q\Psi_{E,-} = 0$ を証明できる．　Q.E.D.

演習問題 3.5　上では (3.46b) 式から (3.48) 式を導いたが，逆に (3.48) 式から

(3.46b) 式を導くこともできる．それを確かめよ．

ヒント： (3.48) 式をもちいて，まず $(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}-\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger)\Psi_{E,\pm} = \pm 2E\Psi_{E,\pm}$ を証明し，(3.45) 式から (3.46b) 式を導出せよ．

さて，$\Psi_{E,\pm}$ の定義 (3.46) とその性質 (3.48) がわかったので，$\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ の間の超対称性関係[*15)]

$$\mathcal{Q}\Psi_{E,+} = \sqrt{2E}\,\Psi_{E,-}, \tag{3.49a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,-} = \sqrt{2E}\,\Psi_{E,+}, \tag{3.49b}$$

を導くことができる．

≪ (3.49) 式の証明 ≫

(3.49a) 式をまず導こう．H と $\mathcal{Q}$ は可換，$(-1)^F$ と $\mathcal{Q}$ は反可換なので

$$\begin{aligned} H\left(\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\right) &= \mathcal{Q}H\Psi_{E,+} \overset{(3.46a)}{=} E\left(\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\right), \\ (-1)^F\left(\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\right) &= -\mathcal{Q}(-1)^F\Psi_{E,+} \overset{(3.46b)}{=} -\left(\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\right) \end{aligned}$$

を満たす．したがって，$\mathcal{Q}\Psi_{E,+}$ はエネルギー E，$(-1)^F=-1$ の固有状態 $\Psi_{E,-}$ に比例する．比例係数を c_E，すなわち，$\mathcal{Q}\Psi_{E,+}=c_E\Psi_{E,-}$ として，両辺のノルムを計算すると

$$\begin{aligned} &\langle\mathcal{Q}\Psi_{E,+}|\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle \\ \overset{(3.7)}{\Longrightarrow}\ &\langle\Psi_{E,+}|\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle \\ \overset{(3.48a)}{\Longrightarrow}\ &\langle\Psi_{E,+}|\underbrace{(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger)}_{2H}\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle \\ \Longrightarrow\ &2E\langle\Psi_{E,+}|\Psi_{E,+}\rangle = |c_E|^2\langle\Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle \\ \Longrightarrow\ &2E = |c_E|^2, \end{aligned}$$

となる．c_E の位相 $e^{i\theta}$ の不定性があるが，ここでは簡単のため $\theta=0$ とした．次に (3.49a) 式の両辺に $\mathcal{Q}^\dagger$ をかけて，$\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,+}=0$ をもちいると

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^\dagger\times(3.49\text{a})\ \text{式} \overset{(3.48a)}{\Longrightarrow}\ &\underbrace{(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger)}_{2H}\Psi_{E,+} = \sqrt{2E}\,\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,-} \\ \Longrightarrow\ &\sqrt{2E}\,\Psi_{E,+} = \mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,-} \Longrightarrow (3.49\text{b})\ \text{式}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

以上で，性質 ii) をすべて導いたことになる．これまでの結果をまとめると，初めに述べた簡潔な図式 (3.47) にまとめられる．

3.7.3 性質 iii) の導出

上で示した ii) の性質 (3.47) はゼロエネルギー ($E=0$) 状態には当てはまらない．なぜなら，ゼロエネルギー解 $\Psi_{E=0,\pm}$ は，(3.49) 式から次の関係

---

*15) 一般には位相は決まらないので，その自由度を残すなら，(3.49a) 式，(3.49b) 式の右辺にそれぞれ $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ の位相因子を付けておいてもよい．ここでは関係式を簡単にするため位相 $e^{i\theta}$ を $\Psi_{E,-}$ の定義に取り入れて，$e^{i\theta}\Psi_{E,-}$ をあらためて $\Psi_{E,-}$ と書いている．

$$H\Psi_{E=0,\pm} = 0 \iff \mathcal{Q}\Psi_{E=0,\pm} = \mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E=0,\pm} = 0 \tag{3.50}$$

を満たすので，3.7.2 節の議論が成り立たない．つまり，ゼロエネルギー固有状態 $\Psi_{E=0,\pm}$ に $\mathcal{Q}$ をかけても $\mathcal{Q}^\dagger$ をかけてもゼロとなり新たな状態を作り出さないので，$E > 0$ のエネルギー固有状態と違って超多重項を組まない．また，(3.50) 式からわかるように，ゼロエネルギー解は超電荷 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^\dagger$ のゼロ固有値状態である．(3.50) 式の結果と 3.7.2 節での超対称性関係は重要なので，いっしょにまとめて図示しておこう．

複素超電荷による超対称性関係

$$0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \Psi_{E,-} \underset{\mathcal{Q}}{\overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\rightleftarrows}} \Psi_{E,+} \overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longrightarrow} 0 \qquad (E > 0), \tag{3.51a}$$

$$0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \Psi_{E=0,\pm} \overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longrightarrow} 0. \tag{3.51b}$$

演習問題 3.6　次の関係式

$$\langle\Psi_E|2H|\Psi_E\rangle = \|\mathcal{Q}|\Psi_E\rangle\|^2 + \|\mathcal{Q}^\dagger|\Psi_E\rangle\|^2$$

を導いて，(3.50) 式の両辺の等価性を直接証明せよ．

3.7.4　性質 iv) の導出

ウィッテン指数 Δ_W の位相不変性に関する議論は，3.4.4 節と全く同じなので，ここでは繰り返さないことにする．

3.8　円周上の自由粒子 —超対称性の観点から—

形式的な議論が続いたので，もう一度，前章で解析した円周上の自由粒子の量子力学系に戻って，3.4 節，および，3.7 節の結果を具体的に確かめることにしよう．第 2 章では，エネルギーの縮退を超対称性の観点から眺めることはしなかった．そこで，今度はこの系に現れていたエネルギーの縮退を，超対称性の観点から見直すことにする．そうすることによって，古びた風景が全く新しい景色に見えるだろう．

3.8.1　最小超対称性関係による解析

まずは前章のまとめから入ろう．円周上の自由粒子の量子力学系では，演算子 $H, Q, (-1)^F$ はそれぞれ

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}, \tag{3.52a}$$

$$Q = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}, \tag{3.52b}$$

$$(-1)^F = \mathcal{P}, \qquad (\mathcal{P}\ \text{はパリティ演算子}), \tag{3.52c}$$

と与えられ，これらの演算子はエルミートで最小超対称性関係

$$H = Q^2, \tag{3.53a}$$

$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F, \tag{3.53b}$$

$$((-1)^F)^2 = 1, \tag{3.53c}$$

を満たすことを確かめた．波動関数が周期的 $\psi(x+2\pi R) = \psi(x)$ でなければならないので，エネルギー固有値 E_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は離散的な値をとる．

$$E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\hbar}{R}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

ここで，R は円周の半径である．明らかに $E_n \geq 0$ なので，超対称性の性質 i) が満たされていることが具体的に確かめられる．エネルギー固有値 E_n に属する固有関数 $\psi_{n,\pm}(x)$ は次式で与えられた．

$$\psi_{n,+}(x) = N_{n,+} \cos\left(\frac{n}{R}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.54a}$$

$$\psi_{n,-}(x) = N_{n,-} \sin\left(\frac{n}{R}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.54b}$$

ここで，規格化定数 $N_{n,\pm}$ は $\langle\psi_{n,\pm}|\psi_{n,\pm}\rangle = 1$ となるように決められている．$\psi_{n,+}(x)$ $(\psi_{n,-}(x))$ は空間反転 $\mathcal{P}: x \to -x$ のもとでの偶（奇）関数，すなわち，$\mathcal{P}\psi_{n,\pm}(x) = \psi_{n,\pm}(-x) = \pm\psi_{n,\pm}(x)$ なので，次式を満たす．

$$(-1)^F \psi_{n,\pm}(x) \stackrel{(-1)^F=\mathcal{P}}{=} \mathcal{P}\psi_{n,\pm}(x) = \pm\psi_{n,\pm}(x). \tag{3.55}$$

3.4 節の性質 ii) での考察から，$E_n > 0$ のときは $\psi_{n,+}$ と $\psi_{n,-}$ は超電荷 Q で互いに移り合うはずだ．

$$\psi_{n,-} \stackrel{Q}{\longleftrightarrow} \psi_{n,+} \qquad (n > 0). \tag{3.56}$$

実際，$Q \propto \frac{d}{dx}$ であり，$\frac{d}{dx}\sin(nx/R) \propto \cos(nx/R)$, $\frac{d}{dx}\cos(nx/R) \propto \sin(nx/R)$ なので，$n > 0$ のとき，(3.56) 式の関係が成り立つ．このとき，規格化定数の位相を $N_{n,-} = iN_{n,+}$ と選んでおけば，(3.54) 式で与えられる $\psi_{n,\pm}$ $(n > 0)$ は，次の超対称性関係で互いに結びつくことが確かめられる．

$$Q\psi_{n,+}(x) = \sqrt{E_n}\,\psi_{n,-}(x), \tag{3.57a}$$

$$Q\psi_{n,-}(x) = \sqrt{E_n}\,\psi_{n,+}(x). \tag{3.57b}$$

これから $n > 0$ のとき，$\psi_{n,\pm}(x)$ は超多重項を組み，エネルギーの縮退を引き起

こす．その意味で，ゼロエネルギー解 $\psi_{0,+}$ は特殊である．$\psi_{0,+} = N_{0,+}\cos(0) = N_{0,+}$ は x によらない定数なので，超電荷 $Q \propto \frac{d}{dx}$ を作用すると消える．

$$Q\psi_{0,+} = 0. \tag{3.58}$$

よって，ゼロエネルギー解はハミルトニアン演算子のゼロ固有関数 $H\psi_{0,+} = 0$ と同時に，超電荷 Q のゼロ固有関数，すなわち，$Q\psi_{0,+} = 0$ を意味している．したがって，$\psi_{0,+}$ は他の $n > 0$ の固有関数とは違って，1 階微分方程式 $\frac{d}{dx}\psi_{0,+} = 0$ の解となっている．($n > 0$ のモードは 2 階微分方程式の解である．) このように，3.4 節で議論した性質 iii) が確かに満たされていることがわかる．

この量子力学系ではゼロエネルギー解の数は $\mathcal{N}^{+}_{E=0} = 1, \mathcal{N}^{-}_{E=0} = 0$ なので，ウィッテン指数は $\Delta_W = +1$ である．この量が位相不変量（ iv) の性質）であることは，この系のパラメータ $m, R, \hbar$ の値を変えても，$\Delta_W = 1$，すなわち，$\psi_{0,+}$ が唯一のゼロエネルギー解であり続けることから確かめられるが，その幾何学的意味はもうひとつピンとこない．次章のウィッテン模型の場合には，Δ_W が位相不変量であることを，幾何学的な観点から具体的に確かめることができる．位相不変性の性質 iv) については次章で改めて議論することにしよう．

3.8.2 複素超電荷による解析

この節は，3.7 節での複素超電荷をもちいた形式的な議論を，再び円周上の量子力学模型を使って具体的に確かめることを目的としている．3.8.1 節では現れなかった射影演算子の構造が複素超電荷を導入することによって見えてくる．3.8.1 節での議論に比べて，少々複雑に感じるかもしれないが，次章で考察するウィッテン模型の解析の肩慣らしとして取り組んでもらいたい．

複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ の特徴的な性質は，2 回かけるとゼロになるというベキ零性にある．

$$\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0. \tag{3.59}$$

この奇妙なベキ零性 (3.59) がどこから来ているのか，その起源をまず明らかにしよう．以下の考察から，それは複素超電荷に隠れた射影演算子にあることがわかる．定義にしたがって $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ を具体的に求めてみる．$Q_1 = Q$, $Q_2 = -iQ(-1)^F$ であったことを思い出すと

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} &\overset{(3.40\text{a})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + i(-iQ(-1)^F)) \\
&\equiv \sqrt{2}\,Q\mathcal{P}_+, &(3.60\text{a})\\
\mathcal{Q}^\dagger &\overset{(3.40\text{b})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - i(-iQ(-1)^F)) \\
&\equiv \sqrt{2}\,Q\mathcal{P}_-, &(3.60\text{b})
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\mathcal{P}_\pm$ は次式で定義される．

$$\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm (-1)^F) \overset{(3.52c)}{=} \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P}). \tag{3.61}$$

パリティ演算子 $\mathcal{P}$ は任意の関数 $\psi(x)$ に対して空間反転 $\mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x)$ を引き起こすので，$\mathcal{P}_\pm$ の物理的意味は，

$$\mathcal{P}_+ = \text{任意の関数から偶関数成分を取り出す演算子}, \tag{3.62a}$$

$$\mathcal{P}_- = \text{任意の関数から奇関数成分を取り出す演算子}, \tag{3.62b}$$

であることがわかる．これをみるには，まず，任意の関数 $\psi(x)$ がいつでも偶関数と奇関数の和にかけることに注意する．

$$\psi(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\bigl(\psi(x) + \psi(-x)\bigr)}_{\text{偶関数}} + \underbrace{\frac{1}{2}\bigl(\psi(x) - \psi(-x)\bigr)}_{\text{奇関数}}. \tag{3.63}$$

この事実と $\mathcal{P}_\pm$ の定義式 $\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P})$ から得られる次の関係式

$$\mathcal{P}_\pm \psi(x) = \frac{1}{2}\bigl(\psi(x) \pm \psi(-x)\bigr), \tag{3.64}$$

から (3.62) 式の結論が導かれる．$\mathcal{P}_\pm$ は次の性質を満たすこともわかる．

$$\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = 1, \tag{3.65a}$$

$$(\mathcal{P}_\pm)^2 = \mathcal{P}_\pm, \tag{3.65b}$$

$$\mathcal{P}_\pm \mathcal{P}_\mp = 0. \tag{3.65c}$$

このような性質を満たす演算子は**射影演算子**[*16)]と呼ばれる．上式の証明は，$\mathcal{P}_\pm$ の定義と $\mathcal{P}^2 = 1$ の関係から簡単に導ける．$\mathcal{P}_\pm$ は偶奇性に関する射影演算子なので，任意の偶（奇）関数を $\psi_+(x) = \psi_+(-x)$ $(\psi_-(x) = -\psi_-(-x))$ としたとき，次式が成り立つことになる．

$$\mathcal{P}_\pm \psi_\pm(x) = \psi_\pm(x), \tag{3.66a}$$

$$\mathcal{P}_\pm \psi_\mp(x) = 0. \tag{3.66b}$$

$\mathcal{P}_+$ $(\mathcal{P}_-)$ が関数の偶奇性に関する射影演算子であることを念頭において，超電荷 Q との関係をみていこう．パリティ演算子 $\mathcal{P}$ と実（エルミート）超電荷 Q が反可換 $(\mathcal{P}Q = -Q\mathcal{P})$ であったことに注意すると，$\mathcal{P}_\pm$ と Q は次の関係を満たすことがわかる．

---

*16) (3.65) 式を満たす演算子 $\mathcal{P}_\pm$ を射影演算子と呼ぶ理由は，次の通りである．(3.65a) 式は 1 つの空間を $\mathcal{P}_+$ 成分と $\mathcal{P}_-$ 成分の 2 つに分けることを意味し，その 2 つの成分を合わせると元の空間全体になることを表す．(3.65b) 式は一度 $\mathcal{P}_+$（あるいは $\mathcal{P}_-$）成分を取り出してしまえば，再び $\mathcal{P}_+$（あるいは $\mathcal{P}_-$）を作用させても何も変わらないことを意味する．最後の (3.65c) 式は，$\mathcal{P}_+$ 成分と $\mathcal{P}_-$ 成分には共通部分はなく，$\mathcal{P}_+$ 成分には $\mathcal{P}_-$ 成分（あるいはその逆）は含まれていないことを意味している．

$$\mathcal{Q}\mathcal{P}_{\pm} = \mathcal{P}_{\mp}\mathcal{Q}. \tag{3.67}$$

この式の意味することは，実超電荷 $\mathcal{Q}$ は関数の偶奇性を入れ替えるということだ．たとえば，偶関数 $\mathcal{P}_+\psi(x)$ に $\mathcal{Q}$ をかけた関数 $\mathcal{Q}\mathcal{P}_+\psi(x)$ は，上式から $\mathcal{P}_-\mathcal{Q}\psi(x)$ に等しく，この関数は $\mathcal{P}_-$ が一番左にかかっているので奇関数になる．この逆も成り立つので次の関係が得られる．

$$\text{奇関数 } \psi_-(x) \quad \overset{\mathcal{Q}}{\longleftrightarrow} \quad \text{偶関数 } \psi_+(x). \tag{3.68}$$

これは，$\mathcal{Q} \propto \frac{d}{dx}$ なので，$x \to -x$ の変換で $\mathcal{Q} \to -\mathcal{Q}$ となる，すなわち，$\mathcal{Q}$ は奇関数的な変換をすることからも理解できる．

さて，もともとの問題であった複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ のベキ零性 $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ に戻ろう．このベキ零性は「偶奇性に関する射影演算子 $\mathcal{P}_\pm$」と「偶奇性を入れ替える実超電荷 $\mathcal{Q}$」の持つ性質が，その起源になっていることがわかる．

≪ ベキ零性 $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ の証明 ≫

$$\mathcal{Q}^2 \overset{(3.60a)}{=} (\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_+)(\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_+) \overset{(3.67)}{=} 2\mathcal{Q}^2\mathcal{P}_-\mathcal{P}_+ \overset{(3.65c)}{=} 0,$$
$$(\mathcal{Q}^\dagger)^2 \overset{(3.60b)}{=} (\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_-)(\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_-) \overset{(3.67)}{=} 2\mathcal{Q}^2\mathcal{P}_+\mathcal{P}_- \overset{(3.65c)}{=} 0.$$

Q.E.D.

一方，$\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger$ の組合せでは，射影演算子は消え去りハミルトニアンの 2 倍に一致する．

≪ $\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger = 2H$ の証明 ≫

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger &= (\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_-)(\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_+) + (\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_+)(\sqrt{2}\mathcal{Q}\mathcal{P}_-) \\
&\overset{(3.67)}{=} 2\mathcal{Q}^2(\mathcal{P}_+)^2 + 2\mathcal{Q}^2(\mathcal{P}_-)^2 \\
&\overset{(3.65b)}{=} 2\mathcal{Q}^2(\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-) \\
&\overset{(3.65a)}{=} 2\mathcal{Q}^2 \\
&\overset{H=\mathcal{Q}^2}{=} 2H.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

最後に複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ による超対称性関係

$$0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \psi_{n,-} \underset{\mathcal{Q}}{\overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\rightleftarrows}} \psi_{n,+} \overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longrightarrow} 0 \qquad (n > 0), \tag{3.69a}$$

$$0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \psi_{0,+} \overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longrightarrow} 0. \tag{3.69b}$$

を導いて，この章を終えることにしよう．

≪ (3.69) 式の証明 ≫

$\psi_{n,+}(x)$ は偶関数，$\psi_{n,-}(x)$ は奇関数であることに注意して，(3.69) 式が以下のように段階を追って証明される．

- $0 \xleftarrow{\mathcal{Q}} \psi_{n,-} \quad (n>0)$.
  $\psi_{n,-}$ は奇関数なので，偶関数を取り出す射影演算子 $\mathcal{P}_+$ を作用させるとゼロとなる．したがって，$\mathcal{Q}\psi_{n,-} \overset{(3.60\mathrm{a})}{=} \sqrt{2}Q\mathcal{P}_+\psi_{n,-} \overset{(3.66\mathrm{b})}{=} 0$.
- $\psi_{n,+} \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} 0 \quad (n>0)$.
  上と同様にして，$\mathcal{Q}^\dagger\psi_{n,+} \overset{(3.60\mathrm{b})}{=} \sqrt{2}Q\mathcal{P}_-\psi_{n,+} \overset{(3.66\mathrm{b})}{=} 0$ となる．
- $\psi_{n,-} \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} \psi_{n,+} \quad (n>0)$.
  $\psi_{n,-}$ は奇関数なので，奇関数を取り出す射影演算子 $\mathcal{P}_-$ の作用は自明である．すなわち，$\mathcal{P}_-\psi_{n,-} \overset{(3.66\mathrm{a})}{=} \psi_{n,-}$．また，実超電荷 Q は (3.68) 式より偶関数と奇関数を入れ替えるので，$\mathcal{Q}^\dagger\psi_{n,-} \overset{(3.60\mathrm{b})}{=} \sqrt{2}Q\mathcal{P}_-\psi_{n,-} \overset{(3.66\mathrm{a})}{=} \sqrt{2}Q\psi_{n,-} \overset{(3.68)}{\propto} \psi_{n,+}$ となる．
- $\psi_{n,-} \xleftarrow{\mathcal{Q}} \psi_{n,+} \quad (n>0)$.
  上と同様にして，$\mathcal{Q}\psi_{n,+} \overset{(3.60\mathrm{a})}{=} \sqrt{2}Q\mathcal{P}_+\psi_{n,+} \overset{(3.66\mathrm{a})}{=} \sqrt{2}Q\psi_{n,+} \overset{(3.68)}{\propto} \psi_{n,-}$ となる．
- $0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \psi_{0,+} \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} 0 \quad (n=0)$.
  ゼロエネルギー解 $\psi_{0,+}$ は特別で，超多重項を組まずに $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}^\dagger$ のどちらが作用してもゼロとなる．これは，$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ が x 微分を含み，$\psi_{0,+}$ が x によらない定数であることから導かれる． Q.E.D.

※ 図 3.4 の答えは以下の図のようになる．

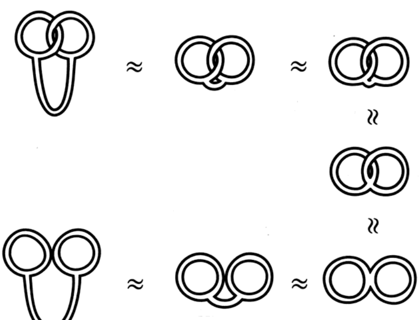


図 3.5　2 つの物体は連続変形でつながっている．

第 4 章

超対称量子力学 – 行列表現 –

前章では，木の中心にある幹に注目するため，枝葉を見ないように心掛けた．その幹は，最小超対称性関係，あるいは，$N = 2$ 超対称性代数から構成され，そこからすべての枝が伸びていることを突き止めた．この章では，幹から枝に視線を移すことにする．今度は，変化に富んだ色とりどりの美しい情景が見えてくる．

4.1 この章のあらまし

この章では，ウィッテン模型と呼ばれる $N = 2$ 超対称量子力学の一般的性質について詳しく調べることにする．ここではウィッテン模型をハミルトニアン形式での行列表示を使って，前章で議論した超対称性の諸性質を具体的に確かめる．そのとき，演算子は 2×2 行列で表現され，波動関数は 2 成分ベクトル関数となる．超対称性理論の基礎を与えてくれる模型でもあるので，じっくりと取り組んでもらいたい*1)．

ウィッテン模型のハミルトニアン H は次のような特徴的な構造をもつ．

$$H = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix}.$$

この形から，実超電荷 Q と演算子 $(-1)^F$ は次式で与えられることがわかる．

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \qquad (-1)^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ここで注目すべき点は，ハミルトニアン H と $(-1)^F$ は対角型の行列で与えられているが，(実) 超電荷 Q は非対角成分に値をもっていることである．後の解

---

*1) 行列をもちいずにウィッテン模型を表現することもできる．それについては第 7 章以降で詳しく取り扱う．そこでは，行列表現ではみえていなかった性質が明らかになる．

析で明らかになるが，この非対角構造が超対称性を引き起こす鍵となるものである．複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ も同様に非対角型の行列で表される．

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}A & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これらの演算子が，最小超対称性関係，あるいは，$N = 2$ 超対称性代数を満たすことを確かめることが，4.4 節までの目的である．このことを示すために，演算子 A（とそのエルミート共役 $A^\dagger$）の具体的な表式は全く必要ない．任意の演算子 A に対して，上に挙げた演算子は最小超対称性関係，あるいは，$N = 2$ 超対称性代数を満たす．とはいえ，ハミルトニアンが通常の量子力学系のように，座標に関して 2 階微分演算子であることを要請すると，演算子 A の形は制限されて

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - iW'(x)\right)$$

となる．ここで，$W'(x)$ は任意の x の実関数である．

4.5 節と 4.6 節では，エネルギー固有状態について考察し，縮退したエネルギー固有状態の間の超対称性関係について詳しく議論する．4.7 節では，ゼロエネルギー状態に焦点を当てて，前章ではあまり明確ではなかったウィッテン指数の位相不変性について，幾何学的観点からその性質を明らかにする．ウィッテン模型では，関数 $W'(x)$ の幾何学的性質とウィッテン指数が密接に関係していることが具体的に示される．最後の 4.8 節では，ウィッテン模型の具体例が与えられる．ウィッテン模型は，ハミルトニアン H の表示から，2 つの量子力学系がペアを組んで 1 つの超対称量子力学系を構成していることがわかる．具体例をみてみると，お互い関係あるとは思われていなかった 2 つの量子力学系が，パートナーを組んでいることを発見する．超対称性を持ち出さなければ，その量子力学系の間の奇妙な対応関係は，謎のままで残されていたことだろう．量子力学の不思議な世界が垣間見える．

4.2 ウィッテン模型

ウィッテン模型 (Witten model) [9] は，**$N = 2$ 超対称量子力学 (supersymmetric quantum mechanics)** *2) と呼ばれ，ハミルトニアン演算子は次の 2×2 行列で与えられる．

$$H \equiv \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

ここで，A と $A^\dagger$ は互いにエルミート共役な微分演算子で次式で定義される．

*2) 略して，SUSY QM，あるいは，SQM と書かれることもある．

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}}\big(p - iW'(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(-i\hbar\frac{d}{dx} - iW'(x)\Big), \tag{4.2a}$$

$$A^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}}\big(p + iW'(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(-i\hbar\frac{d}{dx} + iW'(x)\Big). \tag{4.2b}$$

$W(x)$ は**超ポテンシャル (superpotential)** *3) と呼ばれる x の実関数で，プライム "′" は x 微分を表し，例えば，$W'(x) = \frac{d}{dx}W(x)$, $W''(x) = \frac{d^2}{dx^2}W(x), \cdots$ 等を意味する．具体的に $H_\pm$ を書き下しておくと，

$$H_+ = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m}\big(W'(x)\big)^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x), \tag{4.3a}$$

$$H_- = AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m}\big(W'(x)\big)^2 + \frac{\hbar}{2m}W''(x), \tag{4.3b}$$

となる．また，$H_\pm$ のポテンシャル部分を $V_\pm(x)$ と定義しておくと

$$V_\pm(x) \equiv \frac{1}{2m}\big(W'(x)\big)^2 \mp \frac{\hbar}{2m}W''(x) \tag{4.4}$$

である．ハミルトニアン演算子 H が 2×2 行列で表されているので，それが作用する波動関数は 2 成分要素をもつ．

$$\varPsi(x) = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

例えば，エネルギー固有値方程式は

$$H\varPsi_E(x) = E\varPsi_E(x) \tag{4.6}$$

で与えられる．H が 2×2 行列，$\varPsi_E(x)$ が 2 成分ベクトル関数であることを除けば，通常の固有値方程式と同じである．2 成分波動関数と各成分の（1 成分）波動関数を区別するために，今後は 2 成分波動関数に対しては大文字 $\varPsi, \varPhi$ 等を使うことにして，各成分ごとの 1 成分波動関数には ψ, ϕ 等の小文字の記号を使うことにする．

■コメント■

- ハミルトニアン H の対角成分は，$A^\dagger A, AA^\dagger$ と非常に特徴的な形をしている．第 3 章の議論をきちんと理解しているなら，この演算子の形を見て直ちに，(1 成分) 演算子 $H_\pm$ の固有値はゼロ以上であることが頭に浮かんだはずである．でなければ，まだまだ修行が足りないことになる．
- ウィッテン模型では，すべての演算子は 2×2 行列で表され，波動関数も 2 成分をもつ．これまでこのような系に出会ったことがなければ戸惑うかもしれないが，量子力学的には全く問題は無い．なぜなら，演算子や波動関数は直接の観測量ではないからである．

*3) 文献によっては $W'(x)$ を超ポテンシャルと呼ぶものもあるが，第 8 章で議論される超場形式での超対称性理論の定式化をみれば，$W(x)$ を超ポテンシャルと呼ぶほうがより適切であることがわかる．

我々が観測する物理量は，(4.6) 式のような固有値方程式に現れる固有値やエルミート演算子 A の期待値 $\langle\Psi|A|\Psi\rangle$ であり，それらは実数値で与えられるので何ら問題は生じない．

■

4.3 最小超対称性関係

この量子力学系が超対称性をもつためには，実（エルミート）超電荷 Q とエルミート演算子 $(-1)^F$ が定義されなければならない．ウィッテン模型では，Q と $(-1)^F$ は次式

$$Q \equiv \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$(-1)^F \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

で与えられ，最小超対称性関係*4)

$$H = Q^2\,, \tag{4.9a}$$

$$Q(-1)^F = -(-1)^F Q, \tag{4.9b}$$

$$\left((-1)^F\right)^2 = I_2\,, \tag{4.9c}$$

および，最小超対称性関係から導かれる次の関係式

$$[\,H\,,\,Q\,] = 0, \tag{4.10a}$$

$$[\,H\,,\,(-1)^F\,] = 0, \tag{4.10b}$$

を満たすことが確かめられる．ここで，I_2 は 2×2 単位行列である．また，(4.10) 式右辺の 0 は，2×2 零行列を略記したものである．

演習問題 4.1　$H, Q, (-1)^F$ の行列表示を (4.9) 式および (4.10) 式に代入して，両辺が等しいことを直接確かめよ．

超対称性を保証するためには，超電荷 Q がエルミートであることを確かめなければならない*5)．これを示すには，3.2.1 節で議論した内積を 2 成分波動関

*4)　最小超対称性関係を満たす演算子が行列で与えられるとは想定外だったかもしれない．だが，第 3 章の議論をもう一度振り返って読んでみると，行列型の演算子に対しても議論はそのまま成り立っていることがわかる．

*5)　エルミート演算子に慣れていれば，(4.7) 式で定義される超電荷 Q がエルミートであることは，一目でわかるだろう．とはいえ，行列タイプの演算子は，ほとんどの読者にとって馴染みのないものだと思うので，ここでエルミート性の証明をしておく．

数へ拡張しておく必要がある．任意の 2 成分波動関数

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_+(x)\\ \psi_-(x)\end{pmatrix},\qquad \Phi(x)=\begin{pmatrix}\phi_+(x)\\ \phi_-(x)\end{pmatrix},\tag{4.11}$$

に対する内積は次式で定義される*6)．

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\Psi\rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty}dx\ \Phi^\dagger(x)\Psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \left(\phi_+^*(x),\phi_-^*(x)\right)\begin{pmatrix}\psi_+(x)\\ \psi_-(x)\end{pmatrix}\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \left\{\phi_+^*(x)\psi_+(x)+\phi_-^*(x)\psi_-(x)\right\}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

この定義が内積としての資格をもつことは，3.2.1 節で議論した内積の基本的性質を満たしていることから保証される．超対称性にとって，特に，次の性質は重要である．

$$\langle\Psi|\Psi\rangle\geq 0\,,\tag{4.13a}$$

$$\langle\Psi|\Psi\rangle=0\quad\Longleftrightarrow\quad\Psi(x)=0\,.\tag{4.13b}$$

任意の $(2\times 2$ 行列) 演算子 $\mathcal{O}$ のエルミート共役 $\mathcal{O}^\dagger$ は，内積 $\langle\Phi|\Psi\rangle$ をもちいれば，1 成分波動関数の場合と全く同様に定義できる*7)．

$$\langle\Phi|\mathcal{O}^\dagger\Psi\rangle\equiv\langle\mathcal{O}\Phi|\Psi\rangle,\quad \text{あるいは,}\quad \langle\mathcal{O}^\dagger\Phi|\Psi\rangle\equiv\langle\Phi|\mathcal{O}\Psi\rangle.\tag{4.14}$$

上式は $\mathcal{O}^\dagger$ の定義式として理解されなければならない．つまり，$\mathcal{O}^\dagger$ は (4.14) 式の右辺を通じて定義されるということだ．

さて，エルミート共役の定義もはっきりしたので，(4.7) 式で定義された超電荷 Q がエルミート，すなわち，次式を満たすことを確かめる．

$$\langle Q\Phi|\Psi\rangle=\langle\Phi|Q\Psi\rangle.\tag{4.15}$$

下に示した証明は少々長いが，やっていることは，左の $\Phi(x)$ にかかっている演算子 Q を右の $\Psi(x)$ にかけ直すという操作にすぎない．自明でない部分は微分がかかっている項で，$\Phi(x)$ にかかっていた x 微分を $\Psi(x)$ にかけ直すために部分積分が必要となる．それ以外の操作は定義にしたがった簡単な式の変形にすぎない．ゆっくりと目で追っていけばそれほど難しいものではないはずだ．この証明が煩雑に見えたら，まだまだエルミート共役の定義に慣れていないと思ったほうがよい．エルミート共役の概念は量子力学では特に重要な位置を占める．その操作に慣れるようにしよう．

---

*6) 空間座標は $-\infty<x<\infty$ で定義されていると仮定している．もし，有限領域に限られているときは，x の積分区間は適宜変更する必要がある．

*7) 3.2.1 節での内積と (4.12) 式の定義は異なるが，ブラケット表示を使って書かれる内積の性質 (たとえば (4.13) 式) は，内積がどのように定義されているかによらない共通のものだ．ここまでくると内積のブラケット表示の便利さがわかってくるだろう．

$$
\begin{aligned}
&\langle Q\varPhi|\varPsi\rangle \\
&\overset{(4.12)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \big(Q\varPhi(x)\big)^{\dagger}\varPsi(x) \\
&\overset{(4.7)(4.11)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \big((A^{\dagger}\phi_-(x))^*, (A\phi_+(x))^*\big)\begin{pmatrix}\psi_+(x)\\ \psi_-(x)\end{pmatrix} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \big\{(A^{\dagger}\phi_-(x))^*\psi_+(x) + (A\phi_+(x))^*\psi_-(x)\big\} \\
&\overset{(4.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \bigg\{\Big(\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d\phi_-^*(x)}{dx} - \frac{i}{\sqrt{2m}}W'(x)\phi_-^*(x)\Big)\psi_+(x) \\
&\qquad + \Big(\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d\phi_+^*(x)}{dx} + \frac{i}{\sqrt{2m}}W'(x)\phi_+^*(x)\Big)\psi_-(x)\bigg\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \bigg\{\phi_-^*(x)\Big(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} - \frac{i}{\sqrt{2m}}W'(x)\Big)\psi_+(x) \\
&\qquad + \phi_+^*(x)\Big(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + \frac{i}{\sqrt{2m}}W'(x)\Big)\psi_-(x)\bigg\} \\
&\overset{(4.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \big\{\phi_-^*(x)A\psi_+(x) + \phi_+^*(x)A^{\dagger}\psi_-(x)\big\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \big(\phi_+^*(x), \phi_-^*(x)\big)\begin{pmatrix}0 & A^{\dagger}\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_+(x)\\ \psi_-(x)\end{pmatrix} \\
&\overset{(4.7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varPhi^{\dagger}(x)Q\varPsi(x) \\
&\overset{(4.12)}{=} \langle\varPhi|Q\varPsi\rangle, \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

これで超電荷 Q がエルミートであることが証明された．ここで，部分積分をする際に生じる表面項は，$\varPhi(\pm\infty) = \varPsi(\pm\infty) = 0$ として落とした．Q と同様に，H と $(-1)^F$ もエルミート演算子であることの証明は，読者の演習問題として残しておく．

演習問題 4.2　H と $(-1)^F$ がエルミート演算子であることを定義にしたがって確かめよ．

さて，$H, Q, (-1)^F$ がすべてエルミートであり，最小超対称性関係を満たすことを確かめたので，3.4 節での議論がそのままウィッテン模型に適用される．これは，3.4 節での証明に必要だったものは，最小超対称性関係を満たすエルミート演算子 $H, Q, (-1)^F$ であり，それらが具体的にどのような量で与えられているかは証明には全く必要なかったからである．したがって，我々は 3.4 節の議論を再び繰り返す必要はない．超対称性のもつ性質 i) $\sim$ iv) がそっくりそのままウィッテン模型で成立する．

■ コメント ■

行列表現で注目すべきポイントは，H と $(-1)^F$ は対角行列だが，超電荷 Q は対角成分がゼロで非対角成分のみをもつという点だ．このことは，Q が 2 成分ベクトルに作用したとき，ベクトルの下成分は上成分に，上成分は下成分に移ることを意味する．超電荷 Q のこの性質が $\Psi_{E,+}$ と $\Psi_{E,-}$ を結びつける役目を果たすことが，これからの解析で明らかになる．

4.4 $N=2$ 超対称性代数

この節では，$N=2$ 超対称性がよくみえる形式に超電荷を書き直す．前章で定義したように，2 つの実（エルミート）超電荷 Q_i $(i=1,2)$ を次式で導入する．

$$Q_1 \equiv Q = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17a}$$

$$Q_2 \equiv -iQ(-1)^F = \begin{pmatrix} 0 & iA^\dagger \\ -iA & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.17b}$$

これらの超電荷とハミルトニアンは次の $N=2$ 超対称性代数を満たす．

$$\{ Q_i , Q_j \} = 2H\delta_{ij} , \tag{4.18a}$$

$$[H , Q_i] = 0 , \qquad (i,j=1,2). \tag{4.18b}$$

前章では最小超対称性関係をもちいて上の関係式を証明したが，ここでは H, Q_i の具体的表示 (4.1) 式と (4.17) 式があるので，直接確かめることができる．証明はそれほど難しくはないので，読者の演習問題としておこう．

演習問題 4.3　(4.18) 式を (4.1) 式，および，(4.17) 式から直接確かめよ．

続いて，複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ をもちいた $N=2$ 超対称性代数を導いておこう．前章の定義にしたがって，次のように複素超電荷を定義する．

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}A & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.19a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.19b}$$

この複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ をもちいると，$N=2$ 超対称性代数は 3.6 節で導いたように次式で与えられる．

$$\{ \mathcal{Q}^\dagger , \mathcal{Q} \} = 2H , \tag{4.20a}$$

$$\{ \mathcal{Q} , \mathcal{Q} \} = \{ \mathcal{Q}^\dagger , \mathcal{Q}^\dagger \} = 0 , \tag{4.20b}$$

$$[H , \mathcal{Q}] = [H , \mathcal{Q}^\dagger] = 0 . \tag{4.20c}$$

これらの関係式も $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ の具体的な表示 (4.19) から直接確かめることができる．複素超電荷を次のように書き表しておくとその構造が見やすくなる*8)．

$$\mathcal{Q} = \sqrt{2} A \sigma_- , \tag{4.21a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \sqrt{2} A^\dagger \sigma_+ . \tag{4.21b}$$

ここで，

$$\sigma_+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

を定義した．これらの行列は次の関係を満たす．

$$\sigma_+ \sigma_- + \sigma_- \sigma_+ = I_2 , \tag{4.23a}$$

$$(\sigma_+)^2 = (\sigma_-)^2 = 0 . \tag{4.23b}$$

$\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}^\dagger$ のベキ零性（$\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$）は，(4.21) 式の形に書き直しておくと，$\sigma_\pm$ の満たすベキ零性（$\sigma_\pm^2 = 0$）から来ていることがわかる．

■ コメント ■

$\sigma_\pm$ はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

をもちいて表すと $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ である．行列 $\sigma_\pm$ は，スピン $\hbar/2$ の角運動量を学んだときに現れた，昇降演算子と呼ばれるものである．そう呼ぶ理由は，2 成分ベクトル $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$，あるいは，$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ に作用すると

$$\sigma_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

となり，σ_+ は下成分を上に上げ，σ_- は上成分を下に下げるからである．さらに，

*8) 第 3 章 (3.61) 式で導入された射影演算子 $\mathcal{P}_\pm$ は，ウィッテン模型では次式で与えられる．(複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ と実超電荷 Q は，$\mathcal{Q} = \sqrt{2} Q \mathcal{P}_+, \mathcal{Q}^\dagger = \sqrt{2} Q \mathcal{P}_-$ で関係づけられていた.)

$$\mathcal{P}_+ = \frac{1}{2}(I_2 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}_- = \frac{1}{2}(I_2 - \sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これらの行列表示から明らかなように，$\mathcal{P}_+$ ($\mathcal{P}_-$) は 2 成分のうち上（下）成分を取り出す射影演算子になっていることがわかる．

$$\sigma_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \sigma_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.26}$$

を満たす．これらの結果は，$\binom{1}{0}$ はこれ以上，上に上げることはできないし，$\binom{0}{1}$ は逆にこれ以上，下に下げることはできないことから理解できる．

■

4.5 エネルギー固有状態と超多重項

4.5.1 エネルギー固有状態

前章で考察したエネルギー固有状態の縮退構造について，ウィッテン模型を使って具体的に調べてみよう．この章を読み終えた後に，もう一度前章に立ち戻って，そこで使われた論理をしっかりと理解し直してほしい．

エネルギーの縮退について知りたいので，エネルギー固有状態を取り扱うことになるが，ハミルトニアン H と可換な（エルミート）演算子があれば，エネルギーとその演算子の固有値でラベルすることができる．4.3 節で確かめたように，実超電荷 Q と $(-1)^F$ はともにハミルトニアン H と可換である．ただし，Q と $(-1)^F$ は可換ではないので（$Q(-1)^F = -(-1)^F Q$），両方は採用できない．前章でみたように，H と $(-1)^F$ の同時固有状態に選ぶと，超対称性の性質をうまく取り出すことができる．

$$H\Psi_{E,\pm}(x) = E\Psi_{E,\pm}(x), \tag{4.27}$$

$$(-1)^F \Psi_{E,\pm}(x) = \pm\Psi_{E,\pm}(x). \tag{4.28}$$

$(-1)^F$ の行列表示 $(-1)^F = \sigma_3$ から*9)，(4.28) 式の固有値方程式は簡単に解けて，$\Psi_{E,\pm}$ は次の関数形をもつことがわかる．

$$\Psi_{E,+}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{E,+}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.29a}$$

$$\Psi_{E,-}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{E,-}(x) \end{pmatrix}. \tag{4.29b}$$

実際，これらの波動関数は，$\sigma_3 \Psi_{E,\pm} = \pm\Psi_{E,\pm}$ を満たす．

4.5.2 超対称性関係と超多重項

エネルギー固有状態 $\Psi_{E,\pm}$ に対する解析の詳細に入る前に，これから導きたい結果を先に述べておこう．それは，次の図式に簡潔にまとめられる．

---

*9) σ_3 はパウリ行列で対角成分 $\{+1, -1\}$ をもつ．定義は (4.24) 式で与えられている．

$$E > 0 \text{ の場合：} \quad 0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \Psi_{E,-} \underset{\mathcal{Q}}{\overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\rightleftarrows}} \Psi_{E,+} \overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longrightarrow} 0, \tag{4.30a}$$

$$E = 0 \text{ の場合：} \quad 0 \underset{\mathcal{Q}}{\longleftarrow} \Psi_{E=0,\pm} \overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longrightarrow} 0. \tag{4.30b}$$

同様の結果は前章でも導いた．前章のくり返しの部分もあるが，以下で上の関係を確かめることにする．

これまで何度も議論してきたので，H と $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ の交換関係，および，$(-1)^F$ と $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ の反交換関係の物理的意味を，すぐに思い描けるようになっただろうか．

$$\left.\begin{array}{r} [H\,,\,\mathcal{Q}] = 0 \\ [H\,,\,\mathcal{Q}^\dagger] = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger \text{はエネルギー固有値を変えない．}$$

$$\left.\begin{array}{r} \{(-1)^F\,,\,\mathcal{Q}\} = 0 \\ \{(-1)^F\,,\,\mathcal{Q}^\dagger\} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger \text{は } (-1)^F \text{の固有値を反転する．}$$

このことから，$\mathcal{Q}\Psi_{E,\lambda}$, $\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,\lambda}$ は，(エネルギー固有値 E と $(-1)^F$ の固有値 $-\lambda$ をもつ）固有状態 $\Psi_{E,-\lambda}$ に比例することがわかる．すなわち，$\mathcal{Q}\Psi_{E,\lambda} = c_{E,\lambda}\Psi_{E,-\lambda}$, $\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,\lambda} = \bar{c}_{E,\lambda}\Psi_{E,-\lambda}$ の関係が成り立つ．このとき，注意しなければならないことは，比例係数が 0 の可能性もありうるということだ．実際，$c_{E,-} = \bar{c}_{E,+} = 0$ で次式が成り立つ．

$$\mathcal{Q}\Psi_{E,-} = 0\,, \tag{4.31a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,+} = 0\,. \tag{4.31b}$$

これらの関係式は自明な恒等式であることに注意しておく．なぜなら，$\Psi_{E,+}$ ($\Psi_{E,-}$) は 2 成分波動関数のうち上（下）成分のみゼロでない値をもち，$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ は昇降演算子 $\sigma_\pm$ をもちいて，$\mathcal{Q} = \sqrt{2}A\sigma_-$, $\mathcal{Q}^\dagger = \sqrt{2}A^\dagger\sigma_+$ と書かれているからである．一方，$\mathcal{Q}\Psi_{E,+}$ と $\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,-}$ は $E > 0$ ならば，決して 0 にはならない．もし，そうだとすると (4.31) 式と合わせて $H\Psi_{E,\lambda} = 0$ となってしまい，$\Psi_{E,\lambda}$ がエネルギー E の固有状態であることと矛盾するからである．実際，規格化定数を含めて次の超対称性関係が成り立つ（前章 (3.49) 式参照）．

$$\mathcal{Q}\,\Psi_{E,+} = \sqrt{2E}\,\Psi_{E,-}\,, \tag{4.32a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger\,\Psi_{E,-} = \sqrt{2E}\,\Psi_{E,+}\,. \tag{4.32b}$$

(4.32) 式の意味することは，正エネルギー ($E > 0$) 状態は，$\Psi_{E,-}$ と $\Psi_{E,+}$ とで必ず対となって超多重項を組み，エネルギーの縮退を引き起こすということである．(4.31) 式と (4.32) 式の結果を合わせて図式化したものが (4.30a) 式の関係になる．

ゼロエネルギー固有状態 $\Psi_{E=0,\lambda}$ の場合は特別なことが起こる．このとき，

(4.32) 式から

$$\mathcal{Q}\Psi_{E=0,+}=0, \tag{4.33a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E=0,-}=0, \tag{4.33b}$$

が成り立つことになる．したがって，(4.31) 式と合わせると，ゼロエネルギー固有状態は $\mathcal{Q}$ をかけても $\mathcal{Q}^\dagger$ をかけても 0 になることがわかる．実際，ハミルトニアン H のゼロエネルギー解を求めることと，$\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^\dagger$ のゼロ固有状態を求めることは等価である．すなわち[*10)]，

$$H\Psi_{E=0,\pm}=0 \iff \mathcal{Q}\Psi_{E=0,\pm}=\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E=0,\pm}=0. \tag{4.34}$$

(4.31) 式と (4.33) 式を合わせて図式化したものが (4.30b) 式の関係である．

演習問題 4.4　3.6 節で指摘したように，演算子 $(-1)^F$ は $H, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ とは独立に持ち込んだものではなく，(3.45) 式のように $H, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ と次の関係で結びついている．

$$\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}-\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger=2H(-1)^F.$$

この関係式が成り立っていることを，行列表示をもちいて具体的に確かめよ．

4.6 エネルギー固有関数と固有値方程式

エネルギー固有関数についてもう少し詳しく解析しておこう．ハミルトニアン H は (4.1) 式，すなわち，

$$H=\begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

の形で与えられているので，$\Psi_{E,\pm}$ に対する固有値方程式

$$H\Psi_{E,\pm}(x) = E\Psi_{E,\pm}(x), \tag{4.36a}$$

$$(-1)^F\Psi_{E,\pm}(x) = \pm\Psi_{E,\pm}(x), \tag{4.36b}$$

を解くことと，次の固有値方程式を解くことは等価である．

$$A^\dagger A\,\psi_{E,+}(x)=E\,\psi_{E,+}(x), \tag{4.37a}$$

$$AA^\dagger\,\psi_{E,-}(x)=E\,\psi_{E,-}(x). \tag{4.37b}$$

*10)　ハミルトニアンが $H=\frac{1}{2}(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger)$ と書かれていることから，(4.34) 式の等価性を直接導くことができる．その証明がすぐに思い浮かばないようであれば，演習問題 3.6 に戻ってきちんと理解し直しておこう．ただし，(4.31) 式のところでも述べたが，$\mathcal{Q}\Psi_{E=0,-}=\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E=0,+}=0$ のほうは，自明に成り立つ恒等式である．

ここで，$\Psi_{E,\pm}$ は次の形をもつ 2 成分波動関数である．

$$\Psi_{E,+}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{E,+}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{E,-}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{E,-}(x) \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

(4.37) 式の左辺に現れている微分演算子は特徴的な形をしているので，(4.37a) 式と (4.37b) 式の間には何らかの関係が期待される．実際，$E > 0$ の場合，(4.37a) 式の解 $\psi_{E,+}(x)$ と (4.37b) 式の解 $\psi_{E,-}(x)$ の間には次の 1 対 1 対応（超対称性関係）があることがわかる．

$$A\,\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\,\psi_{E,-}(x)\,, \tag{4.39a}$$

$$A^\dagger\,\psi_{E,-}(x) = \sqrt{E}\,\psi_{E,+}(x)\,. \tag{4.39b}$$

≪ (4.39) 式の証明 ≫

今，$\psi_{E,+}(x)$ の解が 1 つ与えられたとしよう．その解に A をかけた関数 $A\psi_{E,+}(x)$ を考えると，次の方程式を満たすことがわかる．

$$\begin{aligned} AA^\dagger\left(A\psi_{E,+}(x)\right) &= A\left(A^\dagger A\psi_{E,+}(x)\right) \\ &\overset{(4.37\mathrm{a})}{=} E\left(A\psi_{E,+}(x)\right). \end{aligned}$$

したがって，$A\psi_{E,+}(x)$ は (4.37b) 式の解に他ならない．このとき，$E > 0$ なら $A\psi_{E,+}(x) \neq 0$ であることに注意しよう．なぜなら，$A\psi_{E,+}(x) = 0$ と仮定すると (4.37a) 式と矛盾するからである．今度は逆に，$\psi_{E,-}(x)$ の解が 1 つ与えられたとしよう．このときは，関数 $A^\dagger\psi_{E,-}(x)$ を考えると，(4.37a) 式の解を与えることがわかる．なぜなら，$A^\dagger\psi_{E,-}(x)$ は

$$\begin{aligned} A^\dagger A\left(A^\dagger\psi_{E,-}(x)\right) &= A^\dagger\left(AA^\dagger\psi_{E,-}(x)\right) \\ &\overset{(4.37\mathrm{b})}{=} E\left(A^\dagger\psi_{E,-}(x)\right) \end{aligned}$$

を満たすからである．したがって，$A\psi_{E,+}$ $(A^\dagger\psi_{E,-})$ は $\psi_{E,-}$ $(\psi_{E,+})$ に比例することがわかる．比例係数を含めた関係式が (4.39) 式である．比例係数 $\sqrt{E}$ は $\psi_{E,\pm}(x)$ の規格化条件から（位相因子を除いて）決まる．　Q.E.D.

一方，$E = 0$ の解に対しては $\psi_{E=0,+}$ と $\psi_{E=0,-}$ の間にはこのような対応はない．実際，$E = 0$ の場合は (4.39) 式から

$$A\,\psi_{E=0,+}(x) = 0\,, \tag{4.40a}$$

$$A^\dagger\psi_{E=0,-}(x) = 0\,, \tag{4.40b}$$

となる．

ここでの結果は (4.32) 式の関係を成分で書き表したものにすぎないが，注目すべきことは，(4.37a) 式と (4.37b) 式の固有値方程式の間には超対称性が存在するという点である．重要なので，もう一度，まとめて書き下しておこう．

超対称固有値方程式

$$A^\dagger A\,\psi_{E,+}(x) = E\,\psi_{E,+}(x), \tag{4.41a}$$

$$AA^\dagger\,\psi_{E,-}(x) = E\,\psi_{E,-}(x). \tag{4.41b}$$

このとき，$\psi_{E,+}(x)$ と $\psi_{E,-}(x)$ は次の超対称性関係で結ばれる．

$$A\,\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\,\psi_{E,-}(x), \tag{4.42a}$$

$$A^\dagger\,\psi_{E,-}(x) = \sqrt{E}\,\psi_{E,+}(x). \tag{4.42b}$$

$H_+ \equiv A^\dagger A$ と $H_- \equiv AA^\dagger$ はお互い**超対称パートナーハミルトニアン**と呼ばれ，（ゼロ固有値を除いて）両者のエネルギースペクトラムは完全に一致し，$E > 0$ の固有関数の間に 1 対 1 対応が存在する．この結果は次章でのメインテーマとなる重要な帰結だ．

4.7 ゼロエネルギー固有関数とウィッテン指数

4.7.1 ゼロエネルギー解

ゼロエネルギー固有関数は，これまでみたように次の方程式の解で与えられる．

$$\mathcal{Q}\Psi_{E=0,+}(x) = 0 \iff A\,\psi_{E=0,+}(x) = 0, \tag{4.43a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E=0,-}(x) = 0 \iff A^\dagger\psi_{E=0,-}(x) = 0. \tag{4.43b}$$

$E > 0$ の固有関数と違って，ゼロエネルギー解は 1 階微分方程式にしたがうので簡単に求めることができる．

$$\begin{aligned}
A\,\psi_{E=0,+}(x) = 0 \quad &\overset{(4.2\mathrm{a})}{\Longrightarrow} \quad \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}}\Big(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar}W'(x)\Big)\psi_{E=0,+}(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \psi_{E=0,+}(x) = N_{0,+}\,e^{-\frac{1}{\hbar}W(x)}, \qquad (4.44) \\
A^\dagger\,\psi_{E=0,-}(x) = 0 \quad &\overset{(4.2\mathrm{b})}{\Longrightarrow} \quad \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}}\Big(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\hbar}W'(x)\Big)\psi_{E=0,-}(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \psi_{E=0,-}(x) = N_{0,-}\,e^{+\frac{1}{\hbar}W(x)}. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

ここで，$N_{0,\pm}$ は規格化定数である．この結果から,「$(-1)^F = +1$ の固有値をもつゼロエネルギー固有関数 $\Psi_{E=0,+}$ と $(-1)^F = -1$ をもつ $\Psi_{E=0,-}$ がそれぞれ 1 つずつ存在する」とすぐに結論づけてはいけない．微分方程式 (4.43) 式に解が存在したからといって，その解が必ずしもエネルギー固有関数として意味をもつとは限らない．なぜなら，**その解が規格化可能でなければ，物理的に意味をもたせることはできないからだ**[*11]．解の規格化可能性を調べるために，超

*11) 有限系ならば，両端での境界条件を満たしていなければ解として採用できない．ここでは 1 次元座標 x は $-\infty < x < \infty$ の領域をとるとして，解が規格化可能かどうかを調べる．エネルギースペクトラムが連続固有値をもつ場合は，規格化に関して別の議論が必要になる．ここではエネルギー固有値は離散的な場合を想定している．

表 4.1 $W(\pm\infty)$ の縦の欄は超ポテンシャル $W(x)$ の $x \to \pm\infty$ での漸近的振る舞いを表す．$\psi_{E=0,\pm}$ の縦の欄は $\psi_{E=0,\pm}(x)$ が規格化可能かどうかを表す．

	$W(+\infty)$	$W(-\infty)$	$\psi_{E=0,+} \propto e^{-\frac{W(x)}{\hbar}}$	$\psi_{E=0,-} \propto e^{+\frac{W(x)}{\hbar}}$
$a_p > 0,\, p =$ 偶数	$+\infty$	$+\infty$	○	×
$a_p > 0,\, p =$ 奇数	$+\infty$	$-\infty$	×	×
$a_p < 0,\, p =$ 偶数	$-\infty$	$-\infty$	×	○
$a_p < 0,\, p =$ 奇数	$-\infty$	$+\infty$	×	×

ポテンシャル $W(x)$ が，x の多項式で与えられている場合を詳しく考察することにする*12)．

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p, \qquad (a_p \neq 0). \tag{4.46}$$

ここで，p は正の整数としておく*13)．規格化可能なためには，$x \to \pm\infty$ で十分速く $\psi_{E=0,\pm}(x) \to 0$ とならなければならない*14)．このとき，a_p の正負の符号と p が偶数か奇数かによって，$\psi_{E=0,\pm}(x)$ が規格化可能かどうか決まる．なぜなら，$\psi_{E=0,\pm}(x) \propto \exp\left\{\mp\frac{1}{\hbar}W(x)\right\}$ の $x \to \pm\infty$ での漸近的な振る舞いは，$W(x)$ の漸近的振る舞いによって決まるからである．表 4.1 からわかるように，$a_p > 0, p =$ 偶数 のときは $\psi_{E=0,+}(x)$ が規格化可能，$a_p < 0, p =$ 偶数 のときは $\psi_{E=0,-}(x)$ が規格化可能である．$p =$ 奇数 のときは a_p の符号によらず $\psi_{E=0,\pm}(x)$ は規格化可能でない．したがって，ウィッテン模型のエネルギースペクトラムは図 4.1 のようになる．

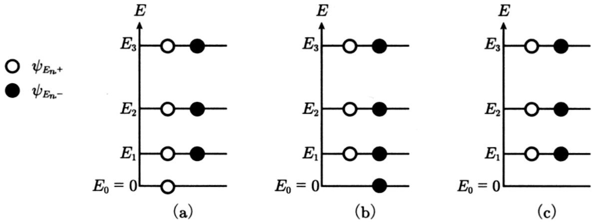


図 4.1 ウィッテン模型のエネルギースペクトラム．(a) $a_p > 0, p =$ 偶数 のときは $\psi_{E=0,+}$ がゼロエネルギー解，(b) $a_p < 0, p =$ 偶数 のときは $\psi_{E=0,-}$ がゼロエネルギー解，(c) $p =$ 奇数 のときはゼロエネルギー解は存在しない．

---

*12) 以下の議論を読めばわかると思うが，$W(x)$ を x の多項式に限る必要はない．$W(x)$ を x の多項式としたのは，$W(x)$ の $x \to \pm\infty$ での振る舞いを明確にするためであって，実際には，$W(x)$ を任意の関数にとっても同様の解析が行える．

*13) 正の実数への拡張は容易い．

*14) 波動関数が規格化可能，すなわち，$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 < \infty$ であるためには，$\psi(\pm\infty) = 0$ が必要条件である．

4.7.2 ウィッテン指数と位相不変量

表 4.1 より，$a_p > 0$ ($a_p < 0$), $p =$ 偶数 のとき $\psi_{E=0,+}(x)$ ($\psi_{E=0,-}(x)$) がゼロエネルギー解として規格化可能，$p =$ 奇数 のときは a_p の符号にかかわらず，ゼロエネルギー解はすべて規格化可能ではない．したがって，ウィッテン指数 $\Delta_W = \mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}$ は次式で与えられる．

$$\Delta_W = \begin{cases} +1, & a_p > 0,\ p = \text{偶数}, \\ -1, & a_p < 0,\ p = \text{偶数}, \\ \ \ 0, & p = \text{奇数}. \end{cases} \tag{4.47}$$

前章でウィッテン指数が位相不変量（理論のパラメータの連続変形のもとでの不変量）であることを説明したが，このことをウィッテン模型で具体的に示すことができる．ゼロエネルギー解 $\psi_{E=0,\pm}(x) \propto \exp\{\mp\frac{1}{\hbar}W(x)\}$ が規格化可能かどうかは，$x \to \pm\infty$ での超ポテンシャル $W(x)$ の漸近的振る舞いによって決まる．$W(x)$ の多項式展開 (4.46) の漸近的振る舞いは，最高ベキの係数 a_p の符号とベキ p の偶奇によって決まる．このことは，ゼロエネルギー解 $\psi_{E=0,\pm}(x)$ が規格化可能かどうかは，係数 a_p の符号とベキ p の偶奇にのみ依存することを意味する．逆に言えば，a_p の符号とベキ p の値を変えない限り，ベキの小さい項の係数 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ を自由に変化させてもウィッテン指数は変わらないことがわかる．この性質が位相不変量と呼ばれるものの特徴である．

ウィッテン指数 Δ_W は $E = 0$ で $(-1)^F = +1$ の状態数 $\mathcal{N}^+_{E=0}$ から $E = 0$ で $(-1)^F = -1$ の状態数 $\mathcal{N}^-_{E=0}$ の差として定義されているが，実は幾何学的な解釈も可能である．それを今から説明しよう．関数 $W(x)$ のグラフを描いたとき，下に凸（谷底）となる点に $+1$ を附与し，上に凸（山頂）となる点に -1 を附与させよう（図 4.2 参照）．それらの総和が実はウィッテン指数 Δ_W に等しい．

$$\Delta_W = \big(W(x)\ \text{の谷の数}\big) - \big(W(x)\ \text{の山の数}\big). \tag{4.48}$$

例えば，$W(x)$ が図 4.3 のような関数形をしていたとしよう．図 4.3 から (4.48)

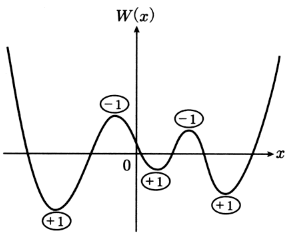


図 4.2 $W(x)$ のグラフを描いたとき，下に凸の頂点（谷底）に $+1$ を，上に凸の頂点（山頂）に -1 を附与する．

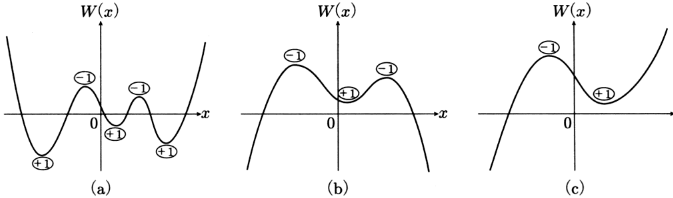


図 4.3 $W(x)$ のグラフの例．谷には $+1$，山には -1 を附与する．(a) $a_p > 0,\ p =$ 偶数，(b) $a_p < 0,\ p =$ 偶数，(c) $p =$ 奇数 の場合の典型的な関数形．

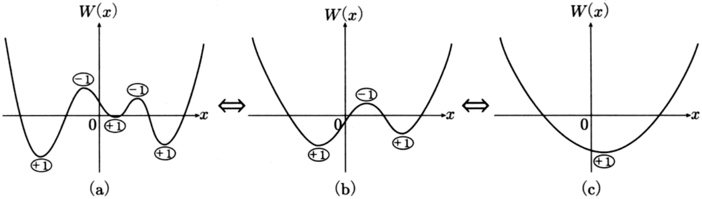


図 4.4 $x \to \pm\infty$ での漸近的な振る舞いは変えずに，$W(x)$ の関数形を変化させた場合の例．この変形で，山と谷の数は (a), (b), (c) の図でそれぞれ，$\{3,2\}$, $\{2,1\}$, $\{1,0\}$ と変化するが，その差（= ウィッテン指数）は変化しないことがわかる．

式の定義にしたがって，ウィッテン指数を計算してみると

$$\Delta_W = \begin{cases} (+1)\times 3 + (-1)\times 2 = +1, & a_p > 0,\ p = \text{偶数}, \\ (+1)\times 1 + (-1)\times 2 = -1, & a_p < 0,\ p = \text{偶数}, \\ (+1)\times 1 + (-1)\times 1 = 0, & p = \text{奇数}, \end{cases} \tag{4.49}$$

となり，前の結果を再現する*15)．さらに，$x \to \pm\infty$ での $W(x)$ の漸近的振る舞いを変えない限り，x の有限領域で $W(x)$ の関数形を自由に変形させても Δ_W の値は変化しない．図 4.4 に連続変形の例を示しておいた．$W(x)$ の関数形を変化させると，山の数や谷の数は変化しうるが，(4.48) 式で定義されるウィッテン指数は変化しないことがわかる．

上では，超ポテンシャル $W(x)$ を連続変形しても，その漸近的振る舞いを変えない限り，ウィッテン指数 Δ_W は不変であることを確かめた．Δ_W が位相不変量ということは，$W(x)$ に含まれていない理論のパラメータを変化させても，

*15) ここで確かめたことは，「(谷の数) − (山の数)」を計算すると (4.47) 式の結果と一致するということであり，その一致が偶然なのか必然なのかについては何も言及していない．ウィッテン指数 Δ_W が (4.48) 式の右辺に等しくなるという厳密な証明は，残念ながらこの本のレベルを超えてしまう．興味のある読者は，ウィッテンの原論文 [9] を読んでみるとよいだろう．

Δ_W の値は変わらないはずだ．そこで，プランク定数 $\hbar \to 0$ の極限で Δ_W を評価してみて，これまで求めた値と矛盾しないかどうかを調べてみよう．そのために，(4.3) 式で与えられるハミルトニアン演算子 $H_\pm$ の $\hbar \to 0$ 極限を考えよう．

$$H_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\left(W'(x)\right)^2}{2m} \mp \frac{\hbar}{2m}W''(x) \ \xrightarrow{\hbar\to 0}\ \frac{\left(W'(x)\right)^2}{2m}. \qquad (4.50)$$

■コメント■

(4.50) 式の $\hbar \to 0$ 極限の結果は，次のように理解することができる．ここではウィッテン指数を考えているので，ゼロエネルギー状態に我々は興味がある．$H_\pm$ の右辺第 1 項は，(運動項なので) 最低エネルギー状態では量子論的なゼロ点振動エネルギーに対応するだろう．しかし，これは純粋に量子力学的効果なので $\hbar \to 0$ の極限では 0 になるはずである．$H_\pm$ の第 3 項も $\hbar$ に比例していることからわかるように，量子論的効果を与える項なので古典近似では無視できると期待される．■

したがって，ゼロエネルギー ($H_\pm = 0$) 状態を求める問題は $\hbar \to 0$ の極限では，ポテンシャルエネルギー $V(x) \equiv (W'(x))^2/2m = 0$ を満たす，ゼロエネルギー解が存在するかどうかの問題に置き換わることになる．p が偶数のときと p が奇数のときで，典型的な $W'(x)$ と $V(x)$ のグラフを図 4.5 に与えておいた．図 4.5 の例では，(a) $p =$ 偶数 の場合は $V(x) = 0$ となる点が 3 つ，(b) $p =$ 奇数 の場合は $V(x) = 0$ となる点が 2 つ，現れている．ところが，ウィッテン指数の計算では，$W(x)$ の漸近的な振る舞いを変えない限り，$W(x)$ の関数形を自由に変形してかまわなかったので，図 4.6(a)，および，図 4.6(b) のように変形しても Δ_W の値は変化しないと期待される．この変形によって，(a) $p =$ 偶数 の場合は $V(x) = 0$ となる点が 1 個存在するので，ゼロエネルギー解は 1 つ，一方，(b) $p =$ 奇数 の場合は $V(x) = 0$ となる点がないのでゼロエネルギー解は存在しないと考えられる．したがって，

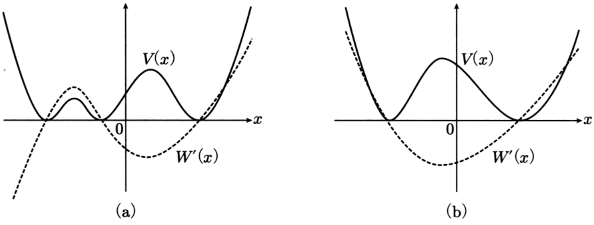


図 4.5 $W'(x)$ と $V(x) = (W'(x))^2/2m$ の典型的なグラフ．(a) $p =$ 偶数，(b) $p =$ 奇数 の場合．

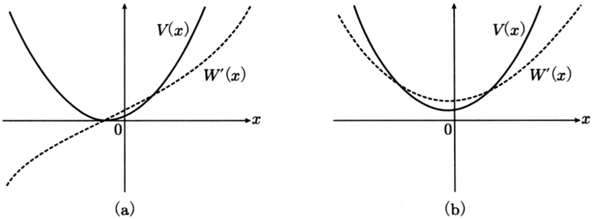


図 4.6 $W(x)$ の漸近的な振る舞いを変えることなく，$W(x)$ を変形することによって，図 4.5(a) を図 4.6(a) へ，図 4.5(b) を図 4.6(b) のグラフに変形させることができる．このとき，$V(x)=0$ となる点は，(a) の場合は 1 つ，(b) の場合は存在しないことがわかる．

$$\Delta_W = \begin{cases} +1 \text{ または } -1, & p = \text{偶数}, \\ 0, & p = \text{奇数}, \end{cases} \tag{4.51}$$

となり，以前求めた結果 (4.49) と矛盾はない．この解析では，Δ_W の正負の符号までは決定することができないが，完全に古典的な議論のみで（正負の符号を除いて）Δ_W を決定できたことは注目に値する．

4.7.3 超対称性の破れとウィッテン指数

ウィッテン指数が物理的に重要な理由は，超対称性の破れの指標になるからである．第 1 章でも述べたが，我々の宇宙が超対称性理論（あるいは，超弦理論）で記述されているとしても，超対称性は低エネルギー領域では破れていなければならない．なぜなら，低エネルギー領域では，超対称性が予言するスペクトラムの縮退が実験で観測されていないからである．理論のもつ対称性は，必ずしも低エネルギー領域で保たれているとは限らない．それを，物理では**自発的対称性の破れ**と呼んでいる．鉄が磁化して磁石となる現象も自発的対称性の破れとしてよく知られた一例である．残念ながら，この自発的対称性の破れをきちんと説明するだけのスペースはないので，対称性についてある程度の知識がないと，この節の議論を理解することは難しいかもしれない．そのときはこの節を読み飛ばしてもらってかまわない．この節を読まなくても，後の章の理解に支障はないので，ご安心を．読者の理論を助けるために，対称性について，解説を第 6 章に与えておいたので，第 6 章を読んでから，もう一度戻って来てもよいだろう．

■ コメント ■

2008 年ノーベル物理学賞を南部陽一郎，小林誠，益川敏英の三氏が受賞した．その受賞理由のキーワードが「**対称性の破れ**」であった．

超対称性が破れているかどうかは，基底状態（これを Ψ_{vac} と表しておこう）を超対称性変換して，不変かどうかをみればよい．基底状態とは最低エネルギー状態のことで**真空 (vacuum)** とも呼ばれる．超電荷 $Q, Q^\dagger$ は超対称性変換を引き起こす生成子なので*16)，次の関係が成り立つことになる．

$$\text{超対称性が破れていない} \iff Q\Psi_{\text{vac}} = Q^\dagger\Psi_{\text{vac}} = 0, \tag{4.52a}$$

$$\text{超対称性が破れている} \iff Q\Psi_{\text{vac}} \neq 0 \text{ あるいは } Q^\dagger\Psi_{\text{vac}} \neq 0. \tag{4.52b}$$

■ コメント ■

超対称性変換のもとでの不変性から，ネーターの定理を通して，保存量としての超電荷 $Q, Q^\dagger$ が導かれる．逆に，超電荷はもとの超対称性変換の生成子の役割も持つ．したがって，状態に超電荷を作用させるということは，超対称性変換をその状態に施していることを意味する．この観点から，上式の右側の式を眺めると，(4.52a) 式の場合は基底状態 Ψ_{vac} を超対称性変換するとゼロ，すなわち，変化量がゼロを意味する．変換しても変わらない（＝不変）のであるから，超対称性が成り立っていることになる．一方，(4.52b) 式の右側の式は，超対称性変換を施すとその変化量がゼロではない．すなわち，超対称性変換のもとで不変でないことになる．したがって，超対称性が破れていることを意味する．このコメントがよくわからなければ，第 6 章へ先にスキップしよう．

■

上の (4.52) 式の主張は，基底状態 Ψ_{vac} のエネルギーに対する条件に置き換えることができる．基底状態（最低エネルギー状態）のエネルギーを E_0 とすると，ハミルトニアン演算子は $2H = Q^\dagger Q + QQ^\dagger$ の形をしているので，(4.52a) 式と (4.52b) 式は次式で置き換えることができる．

$$Q\Psi_{\text{vac}} = Q^\dagger\Psi_{\text{vac}} = 0 \iff E_0 = 0, \tag{4.53a}$$

$$Q\Psi_{\text{vac}} \neq 0 \text{ あるいは } Q^\dagger\Psi_{\text{vac}} \neq 0 \iff E_0 > 0. \tag{4.53b}$$

したがって，(4.52) 式と (4.53) 式を組み合わせると，超対称性が破れているかどうかは，基底状態のエネルギー E_0 がゼロかゼロでないかを調べればよいことになる．

*16) 連続的な対称性があれば，それに附随した保存量が必ず存在する．これはネーターの定理の帰結である．例えば，時間並進不変性と空間並進不変性は，それぞれエネルギー保存と運動量保存を導く．この逆の関係も実は成り立っている．すなわち，保存量はそれぞれの不変性に対する，無限小変換の生成子でもあるのだ．ハミルトニアン演算子は時間並進，運動量演算子は空間並進の生成子の役割を持つ．超対称性もこの対応をもつ．超対称性変換の不変性が超電荷の保存を導き，超電荷は逆に超対称性変換の生成子になっているのである．保存量が無限小変換の生成子であることの詳しい説明は第 6 章で与える．

$$\text{超対称性が破れていない} \iff E_0 = 0, \tag{4.54a}$$

$$\text{超対称性が破れている} \iff E_0 > 0. \tag{4.54b}$$

基底状態がゼロエネルギーをもつかどうかが超対称性の破れと関係していることがわかったところで，いよいよウィッテン指数の登場だ．ウィッテン指数の定義から次のことがわかる．

$$\Delta_W \neq 0 \implies E_0 = 0 \iff \text{超対称性は破れていない} \tag{4.55}$$

$\Delta_W \neq 0$ ということは，少なくとも $\mathcal{N}^+_{E=0}$ あるいは $\mathcal{N}^-_{E=0}$ のどちらか一方はゼロでないはずなので，ゼロエネルギー解が存在することになる．ゼロエネルギーは超対称性理論では最低エネルギーなので，定義から基底状態はゼロエネルギーをもつことになる．つまり，$\Delta_W \neq 0$ のときは，超対称性は破れていないことになる．

$\Delta_W = 0$ のときは，残念ながら，超対称性の破れに関してははっきりした結論は下せない．なぜなら，$\Delta_W = 0$ のときは，$\mathcal{N}^+_{E=0} = \mathcal{N}^-_{E=0}$ が結論づけられるだけで，$\mathcal{N}^\pm_{E=0}$ がゼロかゼロでないかは Δ_W の値だけではわからないからである．しかし，次の必要条件は成り立つ．

$$\text{超対称性は破れている} \implies \Delta_W = 0. \tag{4.56}$$

これは，超対称性が破れているなら，基底状態は $E_0 \neq 0$ なので $\mathcal{N}^+_{E=0} = \mathcal{N}^-_{E=0} = 0$ のはずだからである．ウィッテン指数が非常に有用な量である理由を述べて，この節を閉じることにしよう．

- Δ_W は位相不変量なので，弱結合/強結合*17) の極限，あるいは，$m \to \infty$, $\hbar \to 0$ などの極限をとることによって厳密に計算できることが，多くの模型で知られている．
- もし，$\Delta_W \neq 0$ ならば，超対称性は破れない．(逆は必ずしも真ならず！) このことは現象論的に重要な意味をもつ．現実の低エネルギーの世界では，超対称性は観測されていないので，超対称性は破れていなければならない．したがって，現象論的モデルを作ろうとする場合は，$\Delta_W = 0$ をもつモデルでなければならない．さもなければ，そのモデルの超対称性は決して破れないし，いくら工夫しようとも現実の世界を記述する模型にはなり得ないのである．

---

*17) たとえば，調和振動子のときのバネ定数 k に対して，$k \to 0$ が弱結合，$k \to \infty$ が強結合に相当する．つまり，相互作用の強さが小さい場合を弱結合，大きい場合を強結合と呼ぶ．

4.8 ウィッテン模型の具体例

これまでは，ウィッテン模型の一般的な性質について調べてきたが，ここでは超ポテンシャル $W(x)$（あるいは $W'(x)$）を具体的に与えて，ハミルトニアン H の対角成分 $H_\pm$ がどのような形で与えられるか調べてみることにしよう．$H_\pm$ はそれぞれ1次元量子力学系のハミルトニアンとみなすことができる．$W''(x) \neq 0$ なら $H_+ \neq H_-$ なので，H_+ と H_- は異なる量子力学系を記述する．興味があるのは，どのような2つの量子力学系 $H_\pm$ がペアを組んで，超対称量子力学系を構成するかである．限られた場合しか紹介できないが*18)，意外な量子力学系が互いに超対称パートナーを組んで結びついていることを発見するだろう．

4.8.1 調和振動子

最初の超ポテンシャルの例は，

$$W(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2 \tag{4.57}$$

である．ここで，ω は調和振動子の角振動数に対応する量である．これから，$W'(x) = m\omega x$, $W''(x) = m\omega$ なので，ハミルトニアン $H_\pm$ は

$$H_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \mp \frac{\hbar\omega}{2} \tag{4.58}$$

となる．右辺第1項と第2項を合わせたものは，調和振動子 (harmonic oscillator) のハミルトニアンに他ならない．したがって，$H_\pm$ は，調和振動子のハミルトニアンに定数項 $\mp\frac{\hbar\omega}{2}$ を付け加えたものになっている．調和振動子で使われる生成・消滅演算子

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(-\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right), \quad a \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right), \tag{4.59}$$

をもちいて，ハミルトニアン H，超電荷 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^\dagger$ を書き表しておくと，

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega\, a^\dagger a & 0 \\ 0 & \hbar\omega(a^\dagger a + 1) \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\sqrt{2\hbar\omega}\, a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & +i\sqrt{2\hbar\omega}\, a^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

となる．ハミルトニアン H_+ のエネルギースペクトラムは $E_{n,+} = n\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)，H_- のエネルギースペクトラムは $E_{n,-} = n\hbar\omega$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) なので，$E > 0$ のスペクトラムに対しては縮退が起きることが確かめられる．これは，調和振動子のエネルギー固有値の間隔が**等間隔**という特殊事情によるもので，$\hbar\omega$ だけずらしても（一番下の固有値を除いて）スペクトラムは完全に

---

*18) この節の具体例では，簡単化のために次元をもったパラメータが省略されているものがある．気になるときは，次元が合うように適当にパラメータを補ってもらいたい．

元と重なる（縮退する）のである．ここで，H_+ のほうにはゼロエネルギー解

$$\psi_{E=0,+}(x) = N_{E=0,+}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \tag{4.62}$$

が含まれていることに注意しておく．H_- は H_+ に $\hbar\omega$ だけエネルギーを加えたものなので，$E_{1,-} = \hbar\omega$ からスペクトラムは始まることになる．

演習問題 4.5　生成・消滅演算子 $a^\dagger, a$ をもちいて，$\psi_{E_n,+}$ と $\psi_{E_n,-}$ の間の超対称性関係を求めよ．一方，$\psi_{E_n,+}$ ($\psi_{E_n,-}$) は，$a\,\psi_0 = 0$ を満たす解 ψ_0 に生成演算子 $a^\dagger$ を n 回（$n-1$ 回）作用させることによって生成することができる．このことからも，$\psi_{E_n,+}$ と $\psi_{E_n,-}$ の間の超対称性関係が得られることを示せ．

4.8.2　自由粒子

超ポテンシャルの 1 階微分 $W'(x)$ を次のようにえらんでみよう．

$$W'(x) = \hbar \tanh(x). \tag{4.63}$$

このとき，少しばかり驚く結果が得られる．ハミルトニアン $H_\pm$ のポテンシャル部分を $V_\pm(x)$ としておくと，

$$V_+(x) \equiv \frac{1}{2m}(W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(1 - \frac{2}{\cosh^2(x)}\right), \tag{4.64a}$$

$$V_-(x) \equiv \frac{1}{2m}(W'(x))^2 + \frac{\hbar}{2m}W''(x) = \frac{\hbar^2}{2m}, \tag{4.64b}$$

となることがわかる．V_- は x に依存しない定数なので，H_- は自由粒子を記述するハミルトニアンということになる．一方，超対称パートナーハミルトニアン H_+ は，非自明なポテンシャル $V_+(x)$ をもつ．この両者の間には $E > 0$ のエネルギー固有状態の間に 1 対 1 対応の関係（超対称性関係）が存在することになる．ここで，H_+ のほうにはゼロエネルギー解

$$\psi_{E=0,+}(x) = N_{E=0,+}\frac{1}{\cosh(x)}, \tag{4.65}$$

が存在していることに注意しておく．ポテンシャル $V_+(x)$ は**ローゼン–モース (Rosen–Morse) ポテンシャル**と呼ばれ，詳しく調べられている．この量子力学系は，非自明なポテンシャル $V_+(x)$ をもつにもかかわらず，自由粒子の系と似たような性質をもつことになる．この模型については，たとえば，文献 [10] を参照するとよいだろう．

4.8.3　引力・斥力 δ 関数ポテンシャル

超ポテンシャルの 1 階微分 $W'(x)$ を次のようにとってみよう．

$$W'(x) = \alpha\hbar\bigl(\Theta(x) - \Theta(-x)\bigr). \tag{4.66}$$

ここで，$\alpha > 0$ は実定数，$\Theta(x)$ は**ヘヴィサイドの階段関数**を表し，次式で定義される．

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0, \\ 0\,, & x < 0. \end{cases} \tag{4.67}$$

階段関数の微分はディラックの δ 関数，すなわち，

$$\Theta'(x) = \delta(x) \tag{4.68}$$

なので，ポテンシャル $V_{\pm}(x)$ は次式で与えられる．

$$V_{\pm}(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\big(\alpha^2 \mp 2\alpha\delta(x)\big). \tag{4.69}$$

■ コメント ■

ヘヴィサイド階段関数の満たす次の公式は，覚えておくと役に立つ．

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} dz\, \delta(z), \tag{4.70a}$$

$$\Theta(x)\,\Theta(-x) = 0, \tag{4.70b}$$

$$\Theta(x) + \Theta(-x) = 1. \tag{4.70c}$$

■

ポテンシャル $V_{\pm}(x)$ の定数部分を無視すると，$V_{+}(x)$ は**引力 δ 関数ポテンシャル**，$V_{-}(x)$ は**斥力 δ 関数ポテンシャル**を与え，それらが超対称パートナーを組んでいることになる．$V_{+}(x)$ の系では，規格化可能なゼロエネルギー解が 1 つ存在し，

$$\psi_{E=0,+}(x) = N_{E=0,+}\, e^{-\alpha|x|}, \tag{4.71}$$

で与えられる．

■ コメント ■

δ 関数ポテンシャルの場合のシュレディンガー方程式の解法がわからないなら，もう一度，量子力学の教科書を紐解こう．そこでは，(恐らく) δ 関数ポテンシャルを持ち込む代わりに，原点での境界条件に置き換えて解く方法が書かれているだろう．ここでの問題も同様にして解くことができる．そのときは，$V_{\pm}(x)$ から δ 関数を取り除いて，その代わりに原点で次の境界条件を課すことによって，波動関数を求めることになる*19)．

$$\psi_{E,\pm}(+\varepsilon) = \psi_{E,\pm}(-\varepsilon)\,,$$
$$\psi'_{E,\pm}(+\varepsilon) - \psi'_{E,\pm}(-\varepsilon) = \mp 2\alpha\psi_{E,\pm}(+\varepsilon)\,.$$

*19)　$\psi_{E=0,-}(x) \propto e^{+\alpha|x|}$ もゼロエネルギー解として境界条件を満たすが，規格化可能ではないので物理的な状態とみなすことはできない．

ここで，ε は正の無限小量である．

4.8.4 クーロンポテンシャル

超ポテンシャルの 1 階微分 $W'(x)$ を次のようにとってみよう．

$$W'(x) = \frac{me^2}{\hbar l} - \frac{\hbar l}{x}, \qquad (x > 0). \tag{4.72}$$

このとき，ポテンシャル $V_\pm(x)$ は次のように計算される．

$$V_\pm(x) = -\frac{e^2}{x} + \frac{\hbar^2 l(l \mp 1)}{2mx^2} + \frac{me^4}{2\hbar^2 l^2}. \tag{4.73}$$

このポテンシャルは，e を電荷，l を軌道角運動量の大きさ，x を動径方向の座標 r とみなせば，**水素原子の動径方向ポテンシャル**に他ならない[*20]．このとき，右辺第 1 項はクーロンポテンシャル，第 2 項は電子がそれぞれ軌道角運動量 $l-1, l$ を持ったときの遠心力ポテンシャルに対応する．(第 3 項は定数で物理的意味は持たないので無視してよい．) このことから，軌道角運動量 $l-1$ と l を持つ状態は，お互い超対称性で結びついていることになる．何か意味ありげな結果に思えてならない．この系も H_+ のほうにゼロエネルギー解が存在し，次式で与えられる．

$$\psi_{E=0,+}(x) = N_{E=0,+}\, x^l\, e^{-\frac{me^2}{\hbar^2 l}x}. \tag{4.74}$$

4.8.5 無限に深い井戸型ポテンシャル

無限に深い井戸型ポテンシャルを考え，そのときのポテンシャルを

$$V_+(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ +\infty, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{4.75}$$

とする．この系は，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の箱の中に閉じ込められた 1 次元粒子系だと考えてもよい．井戸の壁では，波動関数はゼロでなければならない．

$$\psi_{E,+}(x = \pm\pi/2) = 0. \tag{4.76}$$

この境界条件のもと，最低エネルギー状態

$$\psi_{E=0,+}(x) = N_{E=0,+} \cos(x) \tag{4.77}$$

はゼロエネルギー解 $H_+\psi_{E=0,+}(x) = 0$ を満たすことがわかる．一方，$V_+(x)$ の超対称パートナーポテンシャル $V_-(x)$ は，

---

*20) 残念ながら，この系は水素原子の動径方向のハミルトニアンに完全には一致していない．水素原子の運動エネルギー項 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ から動径座標 r の微分項を取り出すと，$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}$ に加えて $-\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ の項が付け加わっている．

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{2}{\cos^2(x)} - 1\Big), \qquad \Big(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\Big) \tag{4.78}$$

で与えられる．このポテンシャルは，$W'(x)$ として

$$W'(x) = \hbar\tan(x), \qquad \Big(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\Big) \tag{4.79}$$

と選んだことに対応する．$V_-(x)$ は **Pöschl–Teller ポテンシャル**と呼ばれ，多くの人によって研究されている．$V_+(x)$ は無限に深い井戸型ポテンシャル中を運動する粒子を表し，もう一方は非自明なポテンシャル $V_-(x)$ 中を運動する粒子を記述する．これらが超対称パートナーを組んで，お互い密接に関係しているのである．直感的には，なかなか理解しがたい結論である．

4.8.6 ディリクレ境界条件・ノイマン境界条件

有限系 $(-1 < x < +1)$ を考え，超ポテンシャルはゼロ $(W(x) = 0)$ とおく．このとき，ポテンシャル $V_\pm(x)$ もゼロとなる．

$$V_\pm(x) = 0, \qquad (-1 < x < +1). \tag{4.80}$$

この系は自明に思えるが，領域の両端での境界条件を考えると興味深い結果が得られる．ハミルトニアン $H_\pm$ に対するそれぞれの系で，次の境界条件を設定してみよう．

$$\psi'_{E,+}(-1) = \psi'_{E,+}(+1) = 0, \tag{4.81a}$$

$$\psi_{E,-}(-1) = \psi_{E,-}(+1) = 0. \tag{4.81b}$$

(4.81a) 式の境界条件を**ノイマン境界条件 (Neumann boundary condition)**，(4.81b) 式の境界条件を**ディリクレ境界条件 (Dirichlet boundary condition)** と呼び，物理ではお馴染みの重要な境界条件だ．ひもの例でいえば，ノイマン境界条件は自由端，ディリクレ境界条件は固定端に対応する．この 2 つの境界条件が超対称性で結びついている．このことをみるには，超対称性関係（今の場合は $W'(x) = 0$ であることに注意）

$$A\,\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,-}(x), \qquad A \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}, \tag{4.82a}$$

$$A^\dagger\,\psi_{E,-}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,+}(x), \qquad A^\dagger \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}, \tag{4.82b}$$

に注目すればよい．(この系は自由粒子なので $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{E,\pm}(x) = E\psi_{E,\pm}(x)$ にしたがうことを考慮に入れれば)，上式の関係から，$\psi_{E,+}(x)$ $(\psi_{E,-}(x))$ がノイマン（ディリクレ）境界条件を満たすなら，そのパートナーの $\psi_{E,-}(x)$ $(\psi_{E,+}(x))$ はディリクレ（ノイマン）境界条件を満たさねばならないことがわかる．また，この系は H_+ のほうにゼロエネルギー解（$\psi_{E=0,+}(x) =$ 定数）が存在している．より一般的な境界条件の間の超対称性関係については，文献 [13] をみても

らいたい.

演習問題 4.6　この 4.8 節で与えられた系にはすべて H_+ のほうにゼロエネルギー解が存在していたが，H_- にはゼロエネルギー解が存在していないことを確かめよ．このとき，ウィッテン指数 Δ_W はいくつか？

■ コメント ■

この 4.8 節で紹介した超対称量子力学系は，すべて厳密に解ける（エネルギー固有値と固有関数が具体的にすべて求まる）系である．厳密に解ける系の，より一般的な議論は次章で与えられる．

■

第 5 章
厳密に解ける量子力学模型

高校生の頃は，運動方程式を解けば身の回りの物理現象をすべて説明できると期待に胸を膨らませたものだ．しかし，大学に入って物理を学んでいくと，ほとんどの方程式は厳密に解けないことを知ってがっかりしたことを覚えている．厳密解が知られている量子力学模型はほんの一部にすぎない*1)．その意味で厳密に解ける模型は貴重な存在だ．厳密さ故に，定量的な議論が行え，その模型の持つ性質も具体的に示すことができる．そして何より重要なことは，厳密に解ける模型の多くは，様々な分野で物理的位置づけを変えながらくり返し現れるという事実だ．厳密性の裏には物理的に重要な何かが潜んでいるという証拠に違いない．

5.1 この章のあらまし

この章では，他の章とは趣が多少異なり，超対称性の構造を調べるのではなく，**超対称性を道具として使って**量子力学模型を厳密に解くことを試みる*2)．5.3 節と 5.4 節で，厳密に解ける模型を構築するためのアイデアを紹介する．**厳密に解ける (exactly solvable) 模型**とは，ここではエネルギー固有値と固有関数がすべて具体的に求まる量子力学模型を指す．

一つ目のアイデアはとてもシンプルだ．厳密に解ける量子力学模型から出発して，その超対称パートナーを求めれば，別の新しい厳密に解ける模型が得られるというわけだ．もう少し詳しく説明しておくと次のようになる．前章で議論したウィッテン模型は，超対称パートナーハミルトニアン $H_\pm$ からなる量子力学系であった．H_+ の固有値/固有関数は（ゼロエネルギー状態を除いて），H_- の固有値/固有関数と 1 対 1 対応の関係にある（図 5.1(a) 参照）．このこと

---

*1) とはいえ，この章で厳密に解ける量子力学模型は無限個あることを示す．

*2) この章は，これから後の章とは独立しているので，超対称性のより深遠な性質を早く知りたいのなら，この章をスキップして第 6 章に飛んでもかまわない．

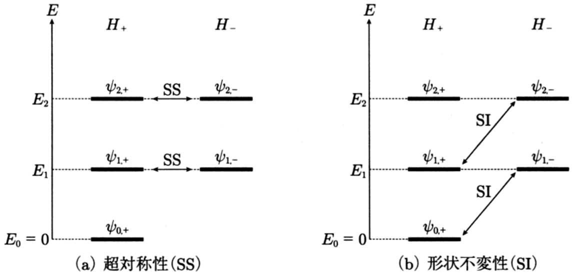


図 5.1　(a) 超対称性 (SS) は横同士の同じエネルギーレベルの状態間 ($\psi_{n,+} \leftrightarrow \psi_{n,-}$) を結びつける．(b) 形状不変性 (SI) は，斜めの状態を結びつける．それらは，それぞれの系の基底状態同士，第 1 励起状態同士，第 2 励起状態同士，$\cdots$ ($\psi_{n,+} \leftrightarrow \psi_{n+1,-}$) を結びつける．$H_+$ 系の基底（最低エネルギー）状態はゼロエネルギー状態で $\psi_{0,+}$，H_- 系はゼロエネルギー状態は持たず基底状態は $\psi_{1,-}$ と書かれていることに注意．超対称性と形状不変性があれば，$\psi_{0,+}$ から出発してすべての状態を結びつけることができる．

は，H_+ 系の固有値/固有関数がすべて知られているなら，超対称性関係をもちいて，H_- 系の固有値/固有関数がすべて求まることを意味する．つまり，1 つの厳密に解ける量子力学系があれば，その系と超対称パートナーを組む量子力学系はすべて厳密に解けることになる．

$$\text{厳密に解ける模型} \xrightarrow[\text{パートナー}]{\text{超対称}} \text{新しい厳密に解ける模型}$$

5.3 節で一つ目のアイデアを実行に移す．そこでは，厳密に解ける模型が与えられたとき，その超対称パートナーをいかに見つけるかが課題となる．5.2 節はそのための準備に当てられる．

上で述べたアイデアは，厳密に解ける模型を知っていないと使えない．二番目のアイデアは，与えられた量子力学系が厳密に解けるための十分条件*3) を教えてくれる．そのアイデアを説明するために，ウィッテンタイプの超対称量子力学模型を考えよう．超対称性は同じエネルギーをもつ状態 $\psi_{n,+}$ と $\psi_{n,-}$ を関係づけてはくれるが（図 5.1(a) 参照），$\psi_{n,+}$（あるいは $\psi_{n,-}$）の関数形そのものに対しては何も情報を与えてくれない．そこで，図 5.1(b) のように，斜めのエネルギー状態間に対応関係（この性質のことを形状不変性*4) と呼ぶ）をつけることができたなら，問題が解けたことになる．なぜなら，超対称性 (SS) と形状不変性 (SI) の両方の性質を持てば，図 5.1(a) と図 5.1(b) からわかるように，

$$\psi_{0,+} \overset{\text{SI}}{\longleftrightarrow} \psi_{1,-} \overset{\text{SS}}{\longleftrightarrow} \psi_{1,+} \overset{\text{SI}}{\longleftrightarrow} \psi_{2,-} \overset{\text{SS}}{\longleftrightarrow} \psi_{2,+} \overset{\text{SI}}{\longleftrightarrow} \cdots$$

*3)　残念ながら，必要条件ではない．
*4)　形状不変性の正確な定義は 5.4 節で与える．

と，すべての状態を結びつけることができるからである．すなわち，$\psi_{0,+}$ から出発して，すべてのエネルギー固有状態 $\psi_{n,\pm}$ を構築できることになる．この構成法がうまくいくためには，(形状不変性によって) 斜めの状態を結びつける必要がある．そのためには，図 5.1(b) のように，H_+ のほうは $E_0 = 0$ からエネルギー固有値が始まり，H_- のほうは E_1 から始まることによって，両者の対応が 1 つずつずれていればよい．この要請は，H_+ 系のみにゼロエネルギー解が存在する超対称量子力学系を考えれば満たされる．

厳密に解ける模型は奥が深い．今でも多くの研究者によって盛んに調べられている分野である．興味のある読者は，英語で書かれているが文献 [10] にまず目を通すのがよいだろう．日本語で書かれたものとして文献 [14] も参考になる．これらを読み終えてから，この分野の最先端へ足を進めるのがよい．

5.2　基底状態の波動関数とハミルトニアン

この節では，5.3 節の準備として，1 次元量子力学系のハミルトニアンと基底状態に対する次の関係を導く．

1 次元量子力学系のハミルトニアンと基底状態

1 次元量子力学系のハミルトニアン H は，基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ とそのエネルギー E_0 をもちいて，次のように書き表すことができる*a)．

$$H = A^\dagger A + E_0 . \tag{5.1}$$

ただし，

$$A = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar}W'(x)\right), \tag{5.2a}$$

$$A^\dagger = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\hbar}W'(x)\right), \tag{5.2b}$$

$$W'(x) = -\hbar\,\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}, \tag{5.2c}$$

である．ここで，プライム “′” は x 微分を表す．このとき，基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ は次式を満たす．

$$A\,\psi_0(x) = 0 . \tag{5.3}$$

*a)　前章までのハミルトニアンとの対応は，$H - E_0$ を前章での H とみなせばよい．そうすれば前章の結果はそのまま成り立つ．

それでは，上の定理を証明するために，1 次元量子力学系のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{5.4}$$

から出発しよう．ここでは，とりあえず，これまでの超対称量子力学の議論は忘れて，任意のポテンシャルエネルギー $V(x)$ をもつ一般の 1 次元量子力学系を考えていると思ってもらいたい．このハミルトニアンの最低エネルギーの値 E_0 と，その基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ が与えられたと仮定しよう．

$$H\,\psi_0(x) = E_0\,\psi_0(x). \tag{5.5}$$

このとき，ポテンシャル $V(x)$ は $\psi_0(x)$ をもちいて，次のように書き表せる．

$$V(x) = \frac{1}{2m}\big(W'(x)\big)^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x) + E_0\,, \tag{5.6a}$$

$$W'(x) \equiv -\hbar\,\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \tag{5.6b}$$

≪ (5.6) 式の証明 ≫

まず，(5.5) 式からポテンシャル $V(x)$ を $\psi_0(x)$ と E_0 で表す．

$$\text{(5.5) 式} \implies \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi_0(x) = E_0\,\psi_0(x)$$

$$\implies V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} + E_0\,. \tag{5.7}$$

この右辺の結果は，確かに (5.6a) 式右辺と一致する．なぜなら，

$$\begin{aligned}\text{(5.6a) 式右辺} &= \frac{1}{2m}(W')^2 - \frac{\hbar}{2m}W'' + E_0 \\ &\overset{(5.6b)}{=} \frac{1}{2m}\left(-\hbar\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)^2 - \frac{\hbar}{2m}\left(-\hbar\frac{\psi_0''\psi_0 - (\psi_0')^2}{{\psi_0}^2}\right) + E_0 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''}{\psi_0} + E_0 \\ &\overset{(5.7)}{=} V(x).\end{aligned}$$

Q.E.D.

(5.6) 式の結果から，(5.4) 式で与えられるハミルトニアン H はいつでも（何やら前章でみたハミルトニアン H_+ に似た）次の形に書き直せることになる．

$$H = A^\dagger A + E_0\,.$$

ここで，演算子 $A, A^\dagger$ は (5.2) で定義されたものである．この定義は第 4 章での (4.2) 式と同じもので，$W'(x)$ は (5.6b) で与えられる．また，A と $A^\dagger$ は互いにエルミート共役であることに注意しておく．

基底状態 $\psi_0(x)$ は $H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x)$ を満たし，$H = A^\dagger A + E_0$ と書けることから，$A^\dagger A\,\psi_0(x) = 0 \;\Rightarrow\; A\,\psi_0(x) = 0$ の解である*5)．実際，$\psi_0(x)$ は演算子 A の定義から

$$A\,\psi_0(x) \overset{(5.2a)}{=} -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar}W'(x)\right)\psi_0(x) \overset{(5.2c)}{=} 0 \tag{5.8}$$

*5) $A^\dagger A\,\psi_0(x) = 0 \;\Rightarrow\; A\,\psi_0(x) = 0$ はすぐに頭に浮かんだだろうか？　もし，そうでなければ，第 4 章に戻って確かめよう．

を満たす．したがって，基底状態 ψ_0 は，ハミルトニアン H の最低エネルギー E_0 をもつ解 ($H\psi_0 = E_0\psi_0$) として定義されるが，H を (5.1) 式のように $H = A^\dagger A + E_0$ と書き表すと，**1 階微分方程式 $\boldsymbol{A\psi_0 = 0}$ の解**でもあり，特別な位置を占めていることがわかる．

■ コメント ■

- 1 次元量子力学系のハミルトニアン H は，E_0 を最低エネルギー固有値として，常に $H = A^\dagger A + E_0$ の形に書き表すことができるということである．次の 5.3 節では，この結果を拡張して，E_0 を任意定数 $\mathcal{E}$ に置き換えて $H = A^\dagger A + \mathcal{E}$ の形に書き表す．このとき，$A, A^\dagger$ に現れる $W'(x)$ は一般に (5.6b) 式とは異なる．
- $H = A^\dagger A + E_0$ から直ちにエネルギー固有値 E に対して，$E \geq E_0$ が成り立つことがわかる．当然ながら，E_0 がエネルギーの下限となっている．この不等式の証明は，もうここでわざわざ書かなくてもよいだろう．
- 前章でのウィッテン模型のハミルトニアン (4.1) をみてもらうと，(4.1) 式で定義された $H_+ = A^\dagger A$ と (5.1) 式は（E_0 を除けば）$A, A^\dagger$ の定義を含めて，同じ形をしている．そこで 5.3 節以降では，超対称パートナーハミルトニアン H_- を利用して，厳密に解ける模型を探っていくことにする．

■

5.3 厳密に解ける模型とその仲間たち

5.3.1 超対称パートナーハミルトニアンの構成法

ここでのアイデアをもう一度述べておくと，次のようになる．厳密に解けることが知られている模型を 1 つ持ってきて，そのハミルトニアンを $H_{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_{(1)}(x)$ としておく．このハミルトニアンを $H_{(1)} = A_{(1)}^\dagger A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ ($\mathcal{E}_{(1)}$ は実定数*6)) と書き表すことができたなら，$A_{(1)}^\dagger$ と $A_{(1)}$ の順番を入れ替えた超対称性パートナーハミルトニアン $H_{(2)} \equiv A_{(1)}A_{(1)}^\dagger + \mathcal{E}_{(1)}$ も厳密に解けることになる*7)．なぜなら，前章の (4.41) 式，および，(4.42) 式から，$H_{(1)}$ 系のエネルギー固有値と固有関数から（基底状態を除いて）$H_{(2)}$ 系のエネルギー固有値と固有関数をすべて求めることができるからである*8)．

前節では，任意のハミルトニアンは，(少なくとも）基底状態の波動関数とそのエネルギー固有値をもちいれば，(5.1) 式の形に書けることを証明した．ここ

*6) 前節では，$\mathcal{E}_{(1)}$ に対応する量は最低エネルギー E_0 だったが，ここではより広いクラスの模型を取り扱うために，$\mathcal{E}_{(1)}$ を実定数として任意性をもたせておいた．

*7) 第 4 章の言葉では，$H_{(1)}$ と $H_{(2)}$ は超対称パートナーハミルトニアン H_+ と H_- に対応するが，この節では超対称性を道具として使うので異なる記法を使うことにした．

*8) ここではエネルギーが $\mathcal{E}_{(1)}$ だけ底上げされているが，$\bar{H}_{(i)} \equiv H_{(i)} - \mathcal{E}_{(i)}$ $(i = 1, 2)$ とおき直せば，(4.41) 式と (4.42) 式の結果がそのまま使える．

ではこの議論を更に一歩進め，ポテンシャル $V_{(1)}(x)$ が与えられたときに，次式を満たす関数 $W'_{(1)}(x)$ の一般解を求める問題に拡張する．

$$V_{(1)}(x) = \frac{1}{2m}\big(W'_{(1)}(x)\big)^2 - \frac{\hbar}{2m}W''_{(1)}(x) + \mathcal{E}_{(1)}. \tag{5.9}$$

ここで，$\mathcal{E}_{(1)}$ は一般化して $\mathcal{E}_{(1)} \leq E_0$（$E_0$ は最低エネルギー）を満たす任意の実数としておく[*9]．ここでの問題設定は，**ポテンシャル $\boldsymbol{V_{(1)}(x)}$ が与えられたときに，上式を満たす関数 $\boldsymbol{W'_{(1)}(x)}$ を求めよ**というものである[*10]．この点を混乱しないようにしてもらいたい．

(5.9) 式を満たす解 $W'_{(1)}(x)$ がみつかれば，ハミルトニアン $H_{(1)}$ を

$$H_{(1)} = A^{\dagger}_{(1)}A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}, \quad A_{(1)} \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\Big(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar}W'_{(1)}(x)\Big) \tag{5.10}$$

と書き表すことができ，（$A^{\dagger}_{(1)}$ と $A_{(1)}$ の順序を入れ替えた）超対称パートナーハミルトニアン $H_{(2)} \equiv A_{(1)}A^{\dagger}_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ を導入することができる．$H_{(1)}$ と $H_{(2)}$ は超対称性で結びついているので，$H_{(1)}$ 系が厳密に解けているのならば，超対称性変換を通じて $H_{(2)}$ の系も厳密に解けることになる．すなわち，新たな厳密に解ける量子力学系 $H_{(2)}$ が求まったことになる[*11]．

(5.9) 式はリッカチ (Riccati) 型方程式と呼ばれる（$W'_{(1)}(x)$ に関する）非線形 1 階微分方程式である．求積法で一般的に解くことはできないが，$W_{(1)}(x)$ から $\phi(x)$ への変数変換

$$\phi(x) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}W_{(1)}(x)\right\} \tag{5.11}$$

によって線形化できる．実際，(5.11) 式から

$$W'_{(1)}(x) = -\hbar\,\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}, \tag{5.12}$$

さらには，

$$\big(W'_{(1)}(x)\big)^2 - \hbar\,W''_{(1)}(x) = \hbar^2\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \tag{5.13}$$

が導かれるので，$W'_{(1)}(x)$ に関するリッカチ型方程式 (5.9) 式は（面白いことに）$\phi(x)$ に関するシュレディンガー型の方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\phi''(x) + V_{(1)}(x)\,\phi(x) = \mathcal{E}_{(1)}\,\phi(x) \tag{5.14}$$

---

*9) $H_{(1)}$ の最低エネルギーを E_0 としておくと，$\mathcal{E}_{(1)} \leq E_0$ でなければならない．なぜなら，$H_{(1)} = A^{\dagger}_{(1)}A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ と書き表せたなら，$H_{(1)}$ のエネルギー固有値 E は $\mathcal{E}_{(1)} \leq E$ を満たさねばならない．しかし，E_0 を $H_{(1)}$ の最低エネルギーとしたのであるから，$\mathcal{E}_{(1)}$ は E_0 よりも大きくなることができない．したがって，$\mathcal{E}_{(1)} \leq E_0$ が要請される．

*10) 前章では $W'(x)$ を与えて $V_{\pm}(x)$ を求めたが，ここでは，その逆である．

*11) $\mathcal{E}_{(1)}$ がどうしても気になるなら，$H'_{(a)} \equiv H_{(a)} - \mathcal{E}_{(1)}$ $(a = 1, 2)$ と定義しておけば，第 4 章の結果がそのまま使える．

に変換される．$W'_{(1)}(x)$ の一般解は (5.14) 式を満たす 1 つの特解 $\phi_{\rm s}(x)$ をもちいて*12)，次式で与えられることがわかる．

$$W'_{(1)}(x) = -\hbar\,\frac{\phi'_{\rm s}(x)}{\phi_{\rm s}(x)} - \frac{\hbar\,(\phi_{\rm s}(x))^{-2}}{c_{(1)} + \int_{x_0}^{x} dz(\phi_{\rm s}(z))^{-2}}\,. \tag{5.15}$$

ここで，$c_{(1)}$ は（任意の）積分定数である．積分の下限値 x_0 は独立なパラメータとみなすべきではない．実際，x_0 の変化分は常に定数 $c_{(1)}$ の再定義で吸収できるので，x_0 を特定の値（たとえば $x_0 = 0$）に固定しても一般性を失うことはない．特解 $\phi_{\rm s}(x)$ は定数 $\mathcal{E}_{(1)}$ の選び方に依存するので，一般解 $W'_{(1)}(x)$ は $c_{(1)}$ と $\mathcal{E}_{(1)}$ の 2 つのパラメータの任意性をもつことがわかる．

≪ (5.15) 式の証明 ≫

$\phi_{\rm s}(x)$ を (5.14) 式を満たす 1 つの特解として，$\phi(x)$ を

$$\phi(x) \equiv \rho(x)\,\phi_{\rm s}(x) \tag{5.16}$$

とおくと（これは $\phi(x) \to \rho(x)$ への変数変換だ），(5.14) 式は $\rho(x)$ に対する方程式

$$\rho''(x)\,\phi_{\rm s}(x) + 2\rho'(x)\phi'_{\rm s}(x) = 0 \tag{5.17}$$

に置き換わる．この方程式の解は次のようにして求まる．

$$\begin{aligned}
\text{(5.17) 式} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} + 2\frac{\phi'_{\rm s}(x)}{\phi_{\rm s}(x)} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big[\ln\rho'(x) + 2\ln\phi_{\rm s}(x)\Big] = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \rho'(x)\big(\phi_{\rm s}(x)\big)^2 = c_0 \qquad (c_0\text{は積分定数}) \\
&\Longrightarrow \quad \rho(x) = c_1 + \int_{x_0}^{x} dz\,\frac{c_0}{(\phi_{\rm s}(z))^2} \qquad (c_1\text{は積分定数}) \\
&\overset{(5.16)}{\Longrightarrow} \quad \phi(x) = \left(c_1 + \int_{x_0}^{x} dz\,\frac{c_0}{(\phi_{\rm s}(z))^2}\right)\phi_{\rm s}(x) \qquad\qquad (5.18) \\
&\Longrightarrow \quad W'_{(1)}(x) \overset{(5.12)}{=} -\hbar\,\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \\
&\qquad \overset{(5.18)}{=} -\frac{\hbar\left(c_1 + \int_{x_0}^{x} dz\,\frac{c_0}{(\phi_{\rm s}(z))^2}\right)\phi'_{\rm s}(x) + \frac{\hbar\,c_0}{\phi_{\rm s}(x)}}{\left(c_1 + \int_{x_0}^{x} dz\,\frac{c_0}{(\phi_{\rm s}(z))^2}\right)\phi_{\rm s}(x)} \\
&\qquad = -\hbar\,\frac{\phi'_{\rm s}(x)}{\phi_{\rm s}(x)} - \frac{\hbar\,(\phi_{\rm s}(x))^{-2}}{c_1/c_0 + \int_{x_0}^{x} dz(\phi_{\rm s}(z))^{-2}}\,.
\end{aligned}$$

最後の表式で $c_{(1)} \equiv c_1/c_0$ とおけば，求めたい結果 (5.15) が得られる． Q.E.D.

ここまでの結果をまとめよう．厳密に解けるハミルトニアン $H_{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_{(1)}(x)$ が与えられたとき，次の表式に書き換えることができる．

$$H_{(1)} = A^{\dagger}_{(1)}A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}\,. \tag{5.19}$$

ただし，

*12)　$\phi_{\rm s}(x)$ は波動関数ではなく，(5.14) 式の解であればよいので，波動関数に課される 2 乗可積分性などを満たしていなくてもかまわない．

$$A_{(1)} \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{\hbar}W'_{(1)}(x)\right), \tag{5.20a}$$

$$A^{\dagger}_{(1)} \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{\hbar}W'_{(1)}(x)\right), \tag{5.20b}$$

$$W'_{(1)}(x) = -\hbar\,\frac{\phi'_{\mathrm{s}}(x)}{\phi_{\mathrm{s}}(x)} - \frac{\hbar\,(\phi_{\mathrm{s}}(x))^{-2}}{c_{(1)}+\int_{x_0}^{x}dz(\phi_{\mathrm{s}}(z))^{-2}}\,. \tag{5.20c}$$

ここで，$\phi_{\mathrm{s}}(x)$ は "シュレディンガー" 方程式 (5.14) の特解である．したがって，我々は 1 つの厳密に解けるハミルトニアン $H_{(1)}$ から，2 つのパラメータ $\mathcal{E}_{(1)}$ と $c_{(1)}$ を含む新たな厳密に解けるハミルトニアン

$$H_{(2)} = A_{(1)}A^{\dagger}_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)} \tag{5.21}$$

を得たことになる．$H_{(1)}$ と $H_{(2)}$ の違いは，演算子 $A_{(1)}, A^{\dagger}_{(1)}$ の順番の違いだけである．$H_{(2)}$ は $H_{(1)}$ の超対称パートナーハミルトニアンなので，$H_{(1)}$ が厳密に解けるならば $H_{(2)}$ も同様に解けたことになる．実際，$H_{(1)}$ のエネルギー固有関数 $\psi_{E,(1)}(x)$ とそのエネルギー固有値 $E+\mathcal{E}_{(1)}$ が得られたら，$H_{(2)}$ の同じエネルギー $E+\mathcal{E}_{(1)}$ をもつ固有関数は（(4.42) 式参照）

$$\psi_{E,(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E}}\,A_{(1)}\,\psi_{E,(1)}(x)\,, \tag{5.22}$$

として，(基底状態を除いて*13)）すべて $\psi_{E,(1)}(x)$ から求まる．すなわち，厳密に解けたことになる．

5.3.2 厳密に解ける模型のファミリー

このステップはさらに続けることができる．任意のハミルトニアン $H_{(1)}$ から出発して (5.19) 式のように書き表すことができたと同様に，(5.21) 式で与えられるハミルトニアン $H_{(2)}$ を新たな超ポテンシャル $W_{(2)}(x)$ を導入して

$$H_{(2)} = A^{\dagger}_{(2)}A_{(2)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} \tag{5.23}$$

と表すことができる．ただし，$\mathcal{E}_{(2)}$ は任意定数，$A_{(2)}, A^{\dagger}_{(2)}$ は次式で定義される．

$$A_{(2)} \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{\hbar}W'_{(2)}(x)\right), \tag{5.24a}$$

$$A^{\dagger}_{(2)} \equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{\hbar}W'_{(2)}(x)\right). \tag{5.24b}$$

このとき，$H_{(2)}$ は (5.21) 式と (5.23) 式の 2 通りの表示をもつので，$H_{(2)}$ のポテンシャル $V_{(2)}(x)$ は，次の 2 通りに書き表せる．

---

*13) $H_{(2)}$ の $E=0$ 状態は $A^{\dagger}_{(1)}\psi_{E=0,(2)}(x)=0$ の解として $\psi_{E=0,(2)}(x) \propto \exp\left\{\frac{1}{\hbar}W_{(1)}(x)\right\}$ と求まる．ただし，規格化可能かどうか，あるいは，有限系では境界条件を満たすかどうかを確かめる必要がある．

$$
\begin{aligned}
V_{(2)}(x) &= \frac{1}{2m}\left(W'_{(1)}(x)\right)^2 + \frac{\hbar}{2m} W''_{(1)}(x) + \mathcal{E}_{(1)} \\
&= \frac{1}{2m}\left(W'_{(2)}(x)\right)^2 - \frac{\hbar}{2m} W''_{(2)}(x) + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} \,.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

つまり，ここでの問題は，関数 $W'_{(1)}(x)$ が与えられているとして，(5.25) 式を満たす関数 $W'_{(2)}(x)$ を求めよということである．$W'_{(2)}(x)$ が求まれば，$H_{(2)} = A_{(1)}A^{\dagger}_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ と書かれていたハミルトニアンは $H_{(2)} = A^{\dagger}_{(2)}A_{(2)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)}$ と書き換えることができ，$A^{\dagger}_{(2)}$ と $A_{(2)}$ を入れ替えた超対称パートナーハミルトニアン[*14)]

$$
H_{(3)} = A_{(2)}A^{\dagger}_{(2)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} \tag{5.26}
$$

も（$H_{(2)}$ の系が厳密に解けているので）厳密に解けることになる．このステップはいくらでも好きなだけ続けることができる．

$$
\begin{aligned}
H_{(1)} &= A^{\dagger}_{(1)}A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)} \,, \\
H_{(2)} &= A_{(1)}A^{\dagger}_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)} = A^{\dagger}_{(2)}A_{(2)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} \,, \\
H_{(3)} &= A_{(2)}A^{\dagger}_{(2)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} = A^{\dagger}_{(3)}A_{(3)} + \mathcal{E}_{(3)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} \,, \\
H_{(4)} &= A_{(3)}A^{\dagger}_{(3)} + \mathcal{E}_{(3)} + \mathcal{E}_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} = \cdots \,, \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

ここで隣り合う任意のハミルトニアンの組 $\{H_{(k)}, H_{(k+1)}\}$ は，お互い超対称パートナーを組んでいることに注意しておく．1 つのステップごとに 2 つのパラメータを含む超対称パートナーハミルトニアンが求まるので，1 つの厳密に解ける模型から派生する無限個の厳密に解ける模型のファミリーが得られることになる[*15)]．

5.3.3 具体例

これまでの構成法を理解するために，具体例で確かめておこう．ここでは，4.8.5 節で議論された無限に深い井戸型ポテンシャルを例にとって説明する[*16)]．この系は厳密に解くことができる初等的な量子力学系の代表例である．

$$
V_{(1)}(x) = \begin{cases} -\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} & 0 < x < L \,, \\ +\infty & x \leq 0,\ x \geq L \,. \end{cases} \tag{5.28}
$$

井戸の壁では波動関数はゼロでなければならない．

---

*14) 超対称パートナーを組んでいるのは，$\{H_{(1)}, H_{(2)}\}$ および $\{H_{(2)}, H_{(3)}\}$ である．$H_{(1)}$ と $H_{(3)}$ は直接超対称パートナーを組んでいないことに注意しよう．

*15) ただし，超ポテンシャル $W'_{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が特異点（発散する点）を持つとポテンシャル $V_{(n)}(x)$ が一般にその点で発散してしまう．特異点が $W'_{(n)}(x)$ に現れてはならないと要求すると，パラメータ $\mathcal{E}_{(n)}$ や $c_{(n)}$ に制限が付くことがある．$W'_n(x)$ が発散することを許す場合は，その代わりにポテンシャルが発散しない領域に x を限る必要がでてくる．

*16) 4.8.5 節では $L = \pi$ とおいて，x の領域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に $\frac{\pi}{2}$ だけずらしている．

$$\psi_{(1)}(x) = 0\,, \qquad (x = 0, L)\,. \tag{5.29}$$

規格化された基底状態の波動関数 $\psi_{0,(1)}(x)$ とエネルギー固有値 E_0 は次式で与えられる[*17].

$$\psi_{0,(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\Bigl(\frac{\pi x}{L}\Bigr)\,, \qquad (0 < x < L)\,, \tag{5.30}$$

$$E_0 = 0\,. \tag{5.31}$$

規格化されたエネルギー固有関数 $\psi_{n,(1)}(x)$ と固有値 E_n は整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ でラベルされ，次式で与えられる.

$$\psi_{n,(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\Bigl(\frac{(n+1)\pi x}{L}\Bigr)\,, \qquad (0 < x < L)\,, \tag{5.32}$$

$$E_n = \frac{n(n+2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots\,. \tag{5.33}$$

基底状態の波動関数 $\psi_{0,(1)}(x)$ と超ポテンシャル $W'_{(1)}(x)$ の関係は (5.6b) 式から

$$W'_{(1)}(x) \equiv -\hbar\,\frac{\psi'_{0,(1)}(x)}{\psi_{0,(1)}(x)} = -\frac{\pi\hbar}{L}\,\cot\Bigl(\frac{\pi x}{L}\Bigr)\,, \qquad (0 < x < L), \tag{5.34}$$

となる[*18]. これから超対称パートナーポテンシャル $V_{(2)}(x)$ は次式で与えられることになる[*19].

$$\begin{aligned} V_{(2)}(x) &\equiv \frac{1}{2m}\bigl(W'_{(1)}(x)\bigr)^2 + \frac{\hbar}{2m}\,W''_{(1)}(x) \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{2}{\sin^2\bigl(\frac{\pi x}{L}\bigr)} - 1\right)\,, \qquad (0 < x < L). \end{aligned} \tag{5.35}$$

$V_{(1)}(x)$ は定数ポテンシャルだが，$V_{(2)}(x)$ は非自明なポテンシャルを与える（図 5.2 参照）. これらが（ゼロエネルギー状態を除いて）全く同じエネルギースペクトラムを導くのである. 超対称性を知らなければ，不思議でならないだろう. 超対称パートナーハミルトニアン $H_{(2)}$ の固有関数 $\psi_{n,(2)}(x)$ は，$H_{(1)}$ の固有関数 $\psi_{n,(1)}(x)$ から超対称性関係

$$\psi_{n,(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n}}\,A_{(1)}\,\psi_{n,(1)}(x)\,, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\,, \tag{5.36}$$

---

*17) 計算を簡単にするため，基底状態のエネルギーがゼロとなるように，(5.28) 式ではポテンシャルエネルギーの原点を $-\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ だけずらした.

*18) ここでは，5.3.1 節で議論した一般の超ポテンシャル (5.15) ではなくて，5.2 節での基底状態の波動関数から得られる超ポテンシャル (5.6b) を考えている. あえて 5.3.1 節の結果を使うと，$\mathcal{E}_{(1)} = 0$ とおき，(5.14) 式の解として $\phi(x) = \psi_{0,(1)}(x)$，(5.15) 式で更に $c_{(1)} = \infty$ ととったものに対応する.

*19) $V_{(1)}(x)$ は次式の関係から計算され，(5.28) 式を再現する.

$$V_{(1)}(x) \equiv \frac{1}{2m}\bigl(W'_{(1)}(x)\bigr)^2 - \frac{\hbar}{2m}\,W''_{(1)}(x) = -\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,, \qquad (0 < x < L).$$

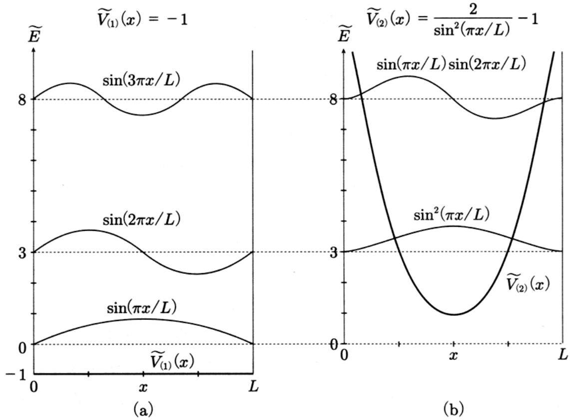


図 5.2 (a) 無限に深い井戸型ポテンシャル $\widetilde{V}_{(1)}(x)=-1$ と (b) 超対称パートナーポテンシャル $\widetilde{V}_{(2)}(x)=\frac{2}{\sin^2(\pi x/L)}-1$ $(0<x<L)$．(a) $\psi_{n,(1)}(x)$ $(n=0,1,2)$, (b) $\psi_{n,(2)}(x)$ $(n=1,2)$ のグラフが描かれている．これら 2 つのポテンシャル $\widetilde{V}_{(1)}(x)$ と $\widetilde{V}_{(2)}(x)$ が（ゼロエネルギー状態を除いて）全く同じエネルギースペクトラムを与える．ここで，$\widetilde{V}_{(i)}(x)\equiv\frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^2}V_{(i)}(x)$ $(i=1,2)$, $\widetilde{E}\equiv\frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^2}E$ と定義した．

をもちいて求まる．ここで，

$$
\begin{aligned}
A_{(1)} &\equiv -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{\hbar}W'_{(1)}(x)\right)\\
&= -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx}-\frac{\pi}{L}\cot\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

である．$n=1,2$ について具体的に波動関数を求めてみると，

$$
\begin{aligned}
\psi_{1,(2)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_1}}A_{(1)}\,\psi_{1,(1)}(x)=i2\sqrt{\frac{2}{3L}}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right),\\
\psi_{2,(2)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_2}}A_{(1)}\,\psi_{2,(1)}(x)=i\frac{2}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right),
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

となる．

演習問題 5.1 (5.38) 式で与えられる波動関数 $\psi_{1,(2)}(x)$ と $\psi_{2,(2)}(x)$ が，(5.35) 式のポテンシャル $V_{(2)}(x)$ をもつハミルトニアンの固有状態になっていることを直接計算で確かめよ．

5.4 形状不変性と厳密に解ける模型

前節では，1 つの厳密に解ける模型から出発し，超対称性をもちいて一連の厳密に解ける模型のファミリーを構成することに成功した．この方法では，厳密に解ける模型が最初にどうしても必要となる．そのような模型から出発しなくても，厳密に解くことのできる方法はないものだろうか？ それがこの節での課題である．

厳密に解くためのアイデアは次のようなものである．超対称性は，図 5.1(a)（あるいは図 5.3）のように横の対応（同じエネルギー同士の対応）をつけてくれるが，それだけではその系を厳密に解くには力不足だ．超対称性に加えて（これから詳しく説明する）形状不変性を要求すれば，横の関係に加えて斜めの関係（図 5.1(b) あるいは図 5.3 参照）がつくので事態は一変し，問題が一挙に解決する．なぜなら，横に加えて斜めの関係があればすべての状態が結びつくことになり，1 つでもエネルギー固有状態が求まれば残りすべての状態が求まる，すなわち，厳密に解けたことになるからである．

上で述べたアイデアにしたがって，超対称パートナーハミルトニアン $H_\pm(a)$ からなる超対称量子力学系から出発しよう．

$$H_+(a) = A^\dagger(a)A(a)\,, \quad H_-(a) = A(a)A^\dagger(a)\,. \tag{5.39}$$

ここで，$H_\pm(a)$ に含まれているパラメータをまとめて a と表している．このとき，H_+ の系の**み**にゼロエネルギー解が存在しているとする（図 5.3 参照）．H_+ のみにゼロエネルギー解が存在しているという条件は，後でわかるように，この方法で模型が厳密に解けるための必要条件である．ハミルトニアン $H_\pm(a)$

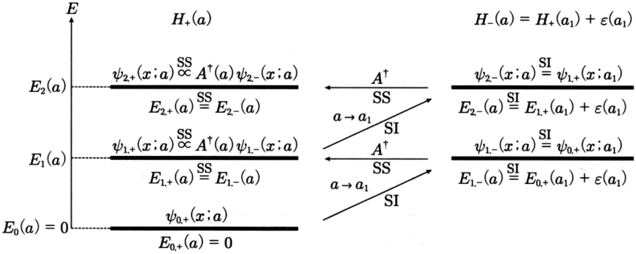


図 5.3 横の関係は超対称性 (SS) に由来するもので，斜めの関係は形状不変性 (SI) に由来するものである．この図からわかるように，$\psi_{0,+}(x;a)$ から出発して，$\psi_{0,+} \overset{\text{SI}}{\to} \psi_{1,-} \overset{\text{SS}}{\to} \psi_{1,+} \overset{\text{SI}}{\to} \psi_{2,-} \overset{\text{SS}}{\to} \psi_{2,+} \overset{\text{SI}}{\to} \psi_{3,-} \cdots$ とすべてのエネルギー固有関数（と固有値）が順次求まることがわかる．つまり，$\psi_{0,+}(x;a)$（これは簡単に求まる）がわかれば，厳密に解けたことになる．

は超対称パートナーを組んでいるので，それぞれのエネルギー固有値 $E_{n,\pm}(a)$，固有関数 $\psi_{n,\pm}(x;a)$ は次の関係で結びついている（(4.42) 式参照）．

$$\psi_{n,+}(x;a) = \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}} A^\dagger(a)\,\psi_{n,-}(x;a)\,, \tag{5.40a}$$

$$\psi_{n,-}(x;a) = \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}} A(a)\,\psi_{n,+}(x;a)\,, \tag{5.40b}$$

$$E_{n,-}(a) = E_{n,+}(a) \equiv E_n(a)\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)\,. \tag{5.40c}$$

このとき，同じモード n 同士（図 5.3 の横の対応）が結びついていることに注意しておく．

$$\psi_{n,+}(x;a) \underset{A^\dagger}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \psi_{n,-}(x;a)\,. \tag{5.41}$$

パラメータ依存性は後で重要になるので，(5.40) 式では $E_{n,\pm}$, $\psi_{n,\pm}$ にパラメータ依存性 a を顕わに書き加えておいた．ただし，ゼロエネルギー ($E_0 = 0$) 解 $\psi_{0,+}(x;a)$ は，仮定より，$H_+(a)$ 系にしか存在しない．

超対称性だけでは厳密に解くことはできない．そこで，ハミルトニアン $H_\pm(a)$ が超対称性だけでなく，次の**形状不変性 (shape invariance)** で

形状不変性

$$H_-(a) = H_+(a_1) + \varepsilon(a_1)\,, \qquad a_1 = f(a) \tag{5.42}$$

さらに結びついているとすれば，図 5.3 の斜めの関係が得られ，（この節の初めに述べたように）この系を厳密に解くことができる．ここで，$a_1 = f(a)$ はパラメータ a から決まる新たなパラメータの値を表し，一般に a とは異なる値を

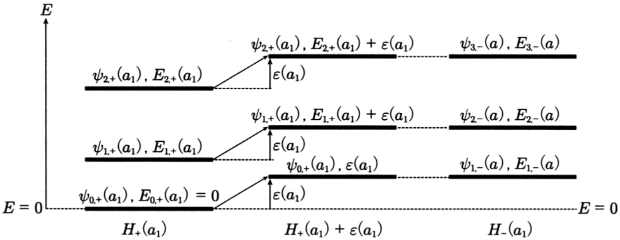


図 5.4 形状不変性の関係 (5.42) を模式的に表した図．図左は $H_+(a_1)$ のスペクトラム．H_+ の系にはパラメータによらずゼロエネルギー解が存在する．真ん中の図は $H_+(a_1) + \varepsilon(a_1)$ のスペクトラム．一番右の図は $H_-(a)$ のスペクトラムで，形状不変性の関係 (5.42) から真ん中の図の $H_+(a_1) + \varepsilon(a_1)$ のスペクトラムに一致する．

取る*20)．また，$\varepsilon(a_1)$ は x によらない定数，ただし，パラメータ a_1 に依存してもよい．(5.42) 式の関係は，図 5.4 にまとめられている．$H_+(a_1)$ のスペクトラムが図 5.4 の左に書かれている．H_+ の系はパラメータ a_1 によらずゼロエネルギー解 $\psi_{0,+}$ が存在するので，$E_{0,+}(a_1)=0$ からエネルギースペクトラムが始まる．真ん中の図は (5.42) 式右辺 $H_+(a_1)+\varepsilon(a_1)$ のスペクトラムで，$H_+(a_1)$ のスペクトラムを $\varepsilon(a_1)$ だけ底上げしたものだ．一番右の図は (5.42) 式左辺 $H_-(a)$ のスペクトラムで，形状不変性の関係 (5.42) から真ん中の図の $H_+(a_1)+\varepsilon(a_1)$ のスペクトラムに一致する．

形状不変性が一体何を意味しているのか，関係式 (5.42) をみてすぐにピンとくる人は少ないだろう．一般論に入る前に，具体例をつかって，形状不変性の役割について説明しておこう．

$$W(x;a)=-\hbar a\ln\bigl(\cos(x)\bigr)\,,\qquad \Bigl(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Bigr). \tag{5.43}$$

この超ポテンシャルは，後で示すように，形状不変性をもつ．a は正の実数で，この模型のパラメータである．この超ポテンシャルから演算子 $A(a)\equiv-\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\bigl(\frac{d}{dx}+\frac{1}{\hbar}W'(x;a)\bigr)$ を定義して，(5.39) での $H_+(a)=A^\dagger(a)A(a)$ と $H_-(a)=A(a)A^\dagger(a)$ を計算してみると

$$H_\pm(a)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_\pm(x;a)\,,\quad V_\pm(x;a)\equiv\frac{\hbar^2}{2m}\Bigl\{\frac{a(a\mp1)}{\cos^2(x)}-a^2\Bigr\} \tag{5.44}$$

となる．ここで頭にとどめておいてもらいたいことは，$H_\pm(a)$ のエネルギースペクトラムは定性的に図 5.1 (あるいは図 5.3) の形で与えられ，$H_+(a)$ 系の**み**にゼロエネルギー解

$$\psi_{0,+}(x;a)\propto\exp\Bigl\{-\frac{1}{\hbar}W(x;a)\Bigr\}=\bigl(\cos(x)\bigr)^a \tag{5.45}$$

が存在する点だ*21)．これは，以下でみるように，形状不変性をつかって厳密に解けるための必要条件である．

さて，(5.44) 式の $V_\pm(x;a)$ をみるとわかるように，$V_+(x;a)$ と $V_-(x;a)$ は $1/\cos^2(x)$ の係数の違いを除いて本質的に同じ関数形をもつ．実際，$a(a-1)\xrightarrow{a\to a+1}(a+1)a$ から $V_-(x;a)=V_+(x;a+1)+\frac{\hbar^2}{2m}\bigl\{(a+1)^2-a^2\bigr\}$ が成り立つので，ハミルトニアン $H_\pm(a)$ の間の関係式

$$H_-(a)=H_+(a+1)+\frac{\hbar^2}{2m}\bigl\{(a+1)^2-a^2\bigr\} \tag{5.46}$$

が得られる．この関係式は形状不変性 (5.42) に他ならない．(5.42) 式での $a_1,\varepsilon(a_1)$ は，(5.46) 式ではそれぞれ $a_1=a+1\equiv f(a),\varepsilon(a_1)=\frac{\hbar^2}{2m}\bigl\{(a_1)^2-(a_1-1)^2\bigr\}$ に対応する．

形状不変性 (5.46) が意味することは，(右辺第 2 項のエネルギーのシフトを除けば) 2 つの量子力学系 $H_-(a)$ と $H_+(a+1)$ は本質的に等価ということである．たとえば，

---

*20)　5.5 節での具体例では，$a_1=a$ あるいは $a_1=a\pm1$ である．

*21)　$H_-(a)$ 系のゼロエネルギー解は $\exp\bigl\{+\frac{1}{\hbar}W(x;a)\bigr\}=1/(\cos(x))^a$ で与えられるが，$a\geq1/2$ としておけば規格化可能ではないので，物理的状態としては存在できない．したがって，スペクトラムの形は図 5.1 (あるいは図 5.3) で与えられることになる．

エネルギー固有状態には次の対応関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
H_-(a) \text{ の基底状態 } &= H_+(a+1) \text{ の基底状態} \\
H_-(a) \text{ の第 1 励起状態 } &= H_+(a+1) \text{ の第 1 励起状態} \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

この関係をエネルギー固有関数で書き直すと

$$
\psi_{n+1,-}(x;a) = \psi_{n,+}(x;a+1)\,, \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{5.48}
$$

となる．モード n が 1 つずれているのは，H_- 系の基底状態は $\psi_{1,-}$，H_+ 系の基底状態は $\psi_{0,+}$ だからである．関係式 (5.48) は，図 5.1(b)（あるいは図 5.3）での斜めの対応を意味する．これで，図 5.1(a) の横の関係（超対称性）と図 5.1(b) の斜めの関係（形状不変性）が確かめられたので，$H_\pm(a)$ のすべてのエネルギー固有関数と固有値を求める準備ができたことになる．たとえば，$H_-(a)$ の基底状態 $\psi_{1,-}(x;a)$ は，(5.48) 式の形状不変性から，$H_+(a+1)$ の基底状態 $\psi_{0,+}(x;a+1)$ に等しいので，

$$
\psi_{1,-}(x;a) \overset{(5.48)}{=} \psi_{0,+}(x;a+1) \overset{(5.45)}{\propto} \big(\cos(x)\big)^{a+1} \tag{5.49}
$$

として求まる．$\psi_{1,-}(x;a)$ がわかると今度は，超対称性関係 (5.40a) から，$H_+(a)$ のエネルギー固有関数 $\psi_{1,+}(x;a)$ が次のように求まる．

$$
\psi_{1,+}(x;a) \overset{(5.40a)}{\propto} A^\dagger(a)\,\psi_{1,-}(x;a) \overset{(5.49)}{\propto} A^\dagger(a)\big(\cos(x)\big)^{a+1}. \tag{5.50}
$$

$\psi_{1,+}(x;a)$ は $H_+(a)$ 系の第 1 励起状態なので，形状不変性 (5.48) から，$H_-(a)$ 系の第 1 励起状態 $\psi_{2,-}(x;a)$ が次のように求まる．

$$
\psi_{2,-}(x;a) \overset{(5.48)}{=} \psi_{1,+}(x;a+1) \overset{(5.50)}{\propto} A^\dagger(a+1)\big(\cos(x)\big)^{a+2}. \tag{5.51}
$$

このように，形状不変性と超対称性を交互にもちいることによって，ハミルトニアン $H_\pm(a)$ のすべてのエネルギー固有関数 $\psi_{n,\pm}(x;a)$ が順次求まることになる．エネルギー固有値のほうは，形状不変性 (5.46) から導かれる次の関係式（(5.48) 式同様，モード n が 1 つずれていることに注意）

$$
E_{n+1,-}(a) = E_{n,+}(a+1) + \frac{\hbar^2}{2m}\left\{(a+1)^2 - a^2\right\}, \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{5.52}
$$

と，超対称性関係 $E_{n,-}(a) = E_{n,+}(a)$ を交互にもちいれば，すべてのエネルギー固有値 $E_{n,\pm}(a)$ を求めることができる．たとえば，$E_{1,-}(a)$ $(= E_{1,+}(a))$ は (5.52) 式と $E_{0,+}(a+1) = 0$*22) より，$E_{1,-}(a) = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{(a+1)^2 - a^2\right\} = E_{1,+}(a)$ と求まる．$E_{2,-}(a)$ $(= E_{2,+}(a))$ は (5.52) 式と $E_{1,+}(a)$ の結果をもちいて，$E_{2,-}(a) = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{(a+2)^2 - (a+1)^2\right\} + \frac{\hbar^2}{2m}\left\{(a+1)^2 - a^2\right\} = E_{2,+}(a)$ と求まる．このように，すべてのエネルギー固有関数と固有値が求まるので，量子力学系 $H_\pm(a)$ が厳密に解けたことになる．それでは，以上の具体例を参考にしながら，以下の一般論を読み進めていくことにしよう．

---

*22)　a によらず $E_{0,+}(a) = 0$ なので，$E_{0,+}(a+1) = 0$ である．

(5.42) 式の関係が，なぜ，図 5.3 で斜めの対応を与えるかを以下で説明しておこう．そのために，ハミルトニアン $H_-(a)$ $(H_+(a))$ の固有値 $E_{n+1,-}(a)$ $(E_{n,+}(a))$ と固有関数 $\psi_{n+1,-}(x;a)$ $(\psi_{n,+}(x;a))$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を以下のように導入しておく．

$$H_-(a)\,\psi_{n+1,-}(x;a) = E_{n+1,-}(a)\,\psi_{n+1,-}(x;a), \tag{5.53a}$$

$$H_+(a_1)\,\psi_{n,+}(x;a_1) = E_{n,+}(a_1)\,\psi_{n,+}(x;a_1)\,,\ (n=0,1,2,\cdots). \tag{5.53b}$$

ここで，固有状態のラベル n の付け方に注意しておく．図 5.3 のように，H_+ のほうはゼロエネルギー解が存在するので $\psi_{0,+}$ からモードは始まり，H_- のほうはゼロエネルギー解が無いので $\psi_{1,-}$ からモードが始まる．つまり，モード n の対応が，H_- と H_+ とで 1 つずれている．(図 5.3 を見るのが一番分かり易い.）この番号づけの違いを頭に置いて，(5.42) 式：$H_-(a)=H_+(a_1)+\varepsilon(a_1)$ の関係に戻ると，$H_-(a)$ と $H_+(a_1)$ のエネルギー固有状態は，次のようにモード番号の小さいほうから順番に対応していることがわかる．

$$\begin{array}{llll} H_-(a):\ \psi_{1,-}(x;a), & \psi_{2,-}(x;a), & \cdots, & \psi_{n+1,-}(x;a),\cdots, \\ \qquad\qquad\ \updownarrow & \qquad\updownarrow & & \qquad\updownarrow \\ H_+(a_1):\ \psi_{0,+}(x;a_1), & \psi_{1,+}(x;a_1), & \cdots, & \psi_{n,+}(x;a_1),\cdots. \end{array} \tag{5.54}$$

ここで上式の横の並びは，$H_-(a)$ と $H_+(a_1)$ のエネルギー固有状態をそれぞれエネルギーの小さい順に並べたものである．一方，縦の対応は，$H_-(a)$ と $H_+(a_1)$ の基底状態同士 $(\psi_{1,-}\leftrightarrow\psi_{0,+})$，第 1 励起状態同士 $(\psi_{2,-}\leftrightarrow\psi_{1,+})$，$\cdots$，第 n 励起状態同士 $(\psi_{n+1,-}\leftrightarrow\psi_{n,+})$ を示したものだ．これが，図 5.3 での斜めの矢印に対応する関係なのである．より正確には，次の等式が成立する．

$$\psi_{n+1,-}(x;a) \overset{\text{SI}}{=} \psi_{n,+}(x;a_1)\,, \tag{5.55a}$$

$$E_{n+1,-}(a) \overset{\text{SI}}{=} E_{n,+}(a_1)+\varepsilon(a_1)\,, \qquad (n=0,1,2,\cdots)\,. \tag{5.55b}$$

(5.55) 式の関係のより詳しい説明は，次の通りである．(5.42) 式より $H_-(a)$ と $H_+(a_1)$ は $H_-(a)=H_+(a_1)+\varepsilon(a_1)$ で結びついているので，(5.53a) 式は

$$H_+(a_1)\,\psi_{n+1,-}(x;a) = \big(E_{n+1,-}(a)-\varepsilon(a_1)\big)\,\psi_{n+1,-}(x;a)$$

と書き換えられる．一方，(5.53b) 式より

$$H_+(a_1)\,\psi_{n,+}(x;a_1) = E_{n,+}(a_1)\,\psi_{n,+}(x;a_1)$$

であった．この 2 つの式を見比べて，(5.54) 式の対応を考慮に入れれば，(5.55a) 式と (5.55b) 式の関係が得られることがわかる．また，これらの関係は図 5.4 からも見てとれる．

以上の超対称性と形状不変性の性質をまとめたものが図 5.3 である．この図

からわかるように，$H_+(a)$ のゼロエネルギー解 $\psi_{0,+}(x;a)$ から出発して，形状不変性（斜めの関係）と超対称性（横の関係）をもちいて，順次すべてのエネルギー固有関数と固有値がお互い結びつくことがわかる．このことは，$H_+(a)$ の任意のエネルギー固有関数 $\psi_{n,+}(x;a)$ が，ゼロエネルギー解 $\psi_{0,+}(x;a)$ を使って表され，同時に $E_{n,+}(a)$ も求まることを意味する．つまり，$H_+(a)$ の量子力学系が厳密に解けたことになる．実際，$\psi_{n,+}(x;a)$ と $E_n(a)$ は，超対称性関係 (5.40) 式，および，形状不変性関係 (5.55) 式をもちいて，次のように求まる．

$H_+(a)$ のエネルギー固有関数と固有値

$$\psi_{n,+}(x;a) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{E_k(a_{n-k})}}\right) \times A^\dagger(a)A^\dagger(a_1)\cdots A^\dagger(a_{n-1})\,\psi_{0,+}(x;a_n), \tag{5.56}$$

$$E_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(a_k)\,, \qquad n = 1,2,3,\cdots. \tag{5.57}$$

ここで，a_n は次式で定義される．

$$a_n \equiv f(a_{n-1}), \quad n = 1,2,3,\cdots, \quad (a_0 \equiv a)\,. \tag{5.58}$$

また，ゼロエネルギー解 $\psi_{0,+}(x;a)$ は，次式で与えられる．

$$\psi_{0,+}(x;a) \propto \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}W(x;a)\right\}. \tag{5.59}$$

したがって，$H_+(a)$ の量子力学系のエネルギースペクトラムが完全に求まったことになる．もちろん，このことは $H_-(a)$ の系も同時に解けたことを意味する．

≪ (5.56) 式 ～ (5.59) 式の証明 ≫

まず，(5.56) 式を証明する．

$$\begin{aligned}
&\psi_{n,+}(x;a)\\
&= \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}}\,A^\dagger(a)\,\psi_{n,-}(x;a) \qquad (\because \text{超対称性 (5.40a)})\\
&= \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}}\,A^\dagger(a)\,\psi_{n-1,+}(x;a_1) \qquad (\because \text{形状不変性 (5.55a)})\\
&= \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}}\,A^\dagger(a)\left(\frac{1}{\sqrt{E_{n-1}(a_1)}}\,A^\dagger(a_1)\,\psi_{n-1,-}(x;a_1)\right)\\
&\qquad\qquad (\because \text{超対称性 (5.40a)})\\
&= \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}}\frac{1}{\sqrt{E_{n-1}(a_1)}}\,A^\dagger(a)A^\dagger(a_1)\,\psi_{n-2,+}(x;a_2)\\
&\qquad\qquad (\because \text{形状不変性 (5.55a)})\\
&= \frac{1}{\sqrt{E_n(a)}}\frac{1}{\sqrt{E_{n-1}(a_1)}}\,A^\dagger(a)A^\dagger(a_1)\\
&\quad \times\left(\frac{1}{\sqrt{E_{n-2}(a_2)}}\,A^\dagger(a_2)\,\psi_{n-2,-}(x;a_2)\right) \qquad (\because \text{超対称性 (5.40a)})
\end{aligned}$$

$$= \cdots$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{E_k(a_{n-k})}} \right) A^\dagger(a) A^\dagger(a_1) \cdots A^\dagger(a_{n-1})\, \psi_{0,+}(x; a_n)\,.$$

(∵ 形状不変性 (5.55a))

ここで，$a_n \equiv f(a_{n-1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$，および，$a_0 \equiv a$ である．エネルギー固有値 $E_n(a)$ も次のようにして求めることができる．

$$
\begin{aligned}
& E_{n,+}(a) \\
&= E_{n,-}(a) \qquad (\because \text{超対称性 (5.40c)}) \\
&= E_{n-1,+}(a_1) + \varepsilon(a_1) \qquad (\because \text{形状不変性 (5.55b)}) \\
&= E_{n-1,-}(a_1) + \varepsilon(a_1) \qquad (\because \text{超対称性 (5.40c)}) \\
&= E_{n-2,+}(a_2) + \varepsilon(a_2) + \varepsilon(a_1) \qquad (\because \text{形状不変性 (5.55b)}) \\
&= E_{n-2,-}(a_2) + \varepsilon(a_2) + \varepsilon(a_1) \qquad (\because \text{超対称性 (5.40c)}) \\
&= \cdots \\
&= E_{0,+}(a_n) + \varepsilon(a_n) + \varepsilon(a_{n-1}) + \cdots \varepsilon(a_1) \qquad (\because \text{形状不変性 (5.55b)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(a_k)\,.
\end{aligned}
$$

最後の等式では，$E_{0,+}(a_n) = 0$ をもちいた．ここでは，$H_+(a_1)$ が特定の a の値に限定されずに，任意の値（特に $a = a_n$，$n = 0, 1, 2, \cdots$）に対してゼロエネルギー解をもつことを仮定している．$H_+(a)$ のゼロエネルギー固有関数 $\psi_{0,+}(x; a)$ は，$A(a)\psi_{0,+}(x; a) = 0$ の解なので簡単に解けて

$$\psi_{0,+}(x; a) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} W(x; a) \right\}$$

として求まる． Q.E.D.

5.5 形状不変性をもつ模型の具体例

5.5.1 調和振動子

形状不変性をもつ超対称量子力学系の例として，調和振動子模型を手始めに解析しよう．このとき，超ポテンシャル，超対称パートナーハミルトニアンは次式で与えられる．

$$W(x; \omega) = \frac{1}{2} m\omega x^2, \quad W'(x; \omega) = m\omega x\,, \tag{5.60}$$

$$H_+(\omega) = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 - \frac{\hbar\omega}{2}\,, \tag{5.61}$$

$$H_-(\omega) = AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\hbar\omega}{2}\,. \tag{5.62}$$

ここで，

$$A = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x \right), \quad A^\dagger = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar} x \right). \tag{5.63}$$

$H_+(\omega)$ のゼロエネルギー固有関数 $\psi_{0,+}(x; \omega)$ は，$A\psi_{0,+}(x; \omega) = 0$ の解なので，規格化定数も含めて次式で与えられる．

$$\psi_{0,+}(x;\omega) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2\right\}. \tag{5.64}$$

超対称パートナーハミルトニアン $H_\pm(\omega)$ は，次の形状不変性で結びついている．

$$H_-(\omega) = H_+(\omega) + \hbar\omega \equiv H_+(\omega) + \varepsilon(\omega)\,, \qquad \varepsilon(\omega) = \hbar\omega\,. \tag{5.65}$$

調和振動子模型の場合は，上の関係式からわかるように，パラメータ ω は左辺と右辺で同じ（前節の言葉でいえば $a_1 = a$）である．この結果から，前節の公式 (5.57) をもちいるとエネルギー固有値 $E_n(\omega)$ は

$$E_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\omega) = n\hbar\omega\,, \tag{5.66}$$

と求まる．エネルギー固有関数 $\psi_{n,+}(x;\omega)$ は，前節の公式 (5.56) をもちいると

$$\begin{aligned}
&\psi_{n,+}(x;\omega)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{E_k}}\right) \left(A^\dagger\right)^n \psi_{0,+}(x;\omega)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(-i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar}\,x\right)^n \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2\right\}\\
&= \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2\right\} H_n\!\left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,x\right).
\end{aligned} \tag{5.67}$$

と求まる．ここで，$H_n(q)$ はエルミート多項式である．

$$H_n(q) \equiv (-1)^n e^{q^2/2} \left(\frac{d}{dq} - q\right)^n e^{-q^2/2}\,. \tag{5.68}$$

5.5.2 Pöschl–Teller ポテンシャル

ここでは，次の超ポテンシャルを考えよう．

$$W(x;a,b) \equiv -\hbar \ln\left[\left(\cos(x)\right)^a \left(\sin(x)\right)^b\right], \tag{5.69}$$

$$W'(x;a,b) = \hbar\left[a\tan(x) - b\cot(x)\right], \quad \left(a, b > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{5.70}$$

超ポテンシャルからポテンシャル $V_\pm(x;a,b)$ を計算すると

$$V_\pm(x;a,b) = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{a(a\mp 1)}{\cos^2(x)} + \frac{b(b\mp 1)}{\sin^2(x)} - (a+b)^2\right\}, \tag{5.71}$$

と求まる．これから，ポテンシャルの間に形状不変性があることが確かめられる．

$$V_-(x;a,b) = V_+(x;a_1,b_1) + \varepsilon(a_1,b_1)\,, \tag{5.72}$$

$$\varepsilon(a,b) \equiv \frac{2\hbar^2}{m}(a+b-1)\,. \tag{5.73}$$

ここで，a_1, b_1 と a, b の関係は次式で与えられる．

$$a_1 = a + 1 \quad \to \quad a_k = a + k\,, \tag{5.74a}$$

$$b_1 = b + 1 \quad \to \quad b_k = b + k\,. \tag{5.74b}$$

超ポテンシャル (5.69) から，H_+ のゼロエネルギー解は次式で与えられる．

$$\psi_{0,+}(x;a,b) \propto \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}W(x;a,b)\right\} \propto \big(\cos(x)\big)^a\big(\sin(x)\big)^b. \tag{5.75}$$

$a, b > 0$ であれば，この波動関数は規格化可能であることがわかる．エネルギー固有値は公式 (5.57) より，

$$\begin{aligned} E_n(a,b) &= \sum_{k=1}^{n}\varepsilon(a_k,b_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\hbar^2}{m}(a+k+b+k-1) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\big\{(2n+a+b)^2-(a+b)^2\big\}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

と求まる．エネルギー固有関数は公式 (5.56) より，

$$\begin{aligned} \psi_{n,+}(x;a,b) &\propto A^\dagger(a,b)A^\dagger(a_1,b_1)\cdots A^\dagger(a_{n-1},b_{n-1})\psi_{0,+}(x;a_n,b_n) \\ &\propto A^\dagger(a,b)A^\dagger(a+1,b+1)\cdots A^\dagger(a+n-1,b+n-1) \\ &\qquad \times\big(\cos(x)\big)^{a+n}\big(\sin(x)\big)^{b+n} \end{aligned} \tag{5.77}$$

と求まる．ここで，$A^\dagger(a,b)$ は次式で与えられている．

表 5.1　形状不変性をもつ超対称量子力学系の例．

$\hbar^{-1}W'(x)$	x の定義域	$\frac{2m}{\hbar^2}V_\pm(x) = (\hbar^{-1}W'(x))^2 \mp \hbar^{-1}W''(x)$	a_1	b_1
$a\tanh(x) + \frac{b}{\cosh(x)}$	$-\infty < x < \infty$	$a^2 + \frac{b^2 - a(a\pm1) + b(2a\pm1)\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$	$a-1$	b
$a\coth(x) - \frac{b}{\sinh(x)}$	$0 < x < \infty$	$a^2 + \frac{b^2 + a(a\pm1) - b(2a\pm1)\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$	$a-1$	b
$-a\cot(x) + \frac{b}{\sin(x)}$	$0 < x < \pi$	$-a^2 + \frac{b^2 + a(a\mp1) - b(2a\mp1)\cos(x)}{\sin^2(x)}$	$a+1$	b
$a\tan(x) - b\cot(x)$	$0 < x < \pi/2$	$-(a+b)^2 + \frac{a(a\mp1)}{\cos^2(x)} + \frac{b(b\mp1)}{\sin^2(x)}$	$a+1$	$b+1$
$a\tanh(x) - b\coth(x)$	$0 < x < \infty$	$(a-b)^2 - \frac{a(a\pm1)}{\cosh^2(x)} + \frac{b(b\mp1)}{\sinh^2(x)}$	$a-1$	$b+1$
$a\tanh(x) + b/a$	$-\infty < x < \infty$	$a^2 + (\frac{b}{a})^2 - \frac{a(a\pm1)}{\cosh^2(x)} + 2b\tanh(x)$	$a-1$	b
$-a\coth(x) + b/a$	$0 < x$	$a^2 + (\frac{b}{a})^2 + \frac{a(a\mp1)}{\sinh^2(x)} - 2b\coth(x)$	$a+1$	b
$-a\cot(x) + b/a$	$0 < x < \pi$	$-a^2 + (\frac{b}{a})^2 + \frac{a(a\mp1)}{\sin^2(x)} - 2b\cot(x)$	$a+1$	b
$ax - b/x$	$0 < x < \infty$	$-a(2b\pm1) + a^2x^2 + \frac{b(b\mp1)}{x^2}$	a	$b+1$
$-a/x + b/a$	$0 < x < \infty$	$\frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{x} + \frac{a(a\mp1)}{x^2}$	$a+1$	b
$-ae^{-x} + b$	$-\infty < x < \infty$	$b^2 - a(2b\pm1)e^{-x} + a^2e^{-2x}$	a	$b-1$
$ax + b$	$-\infty < x < \infty$	$(ax+b)^2 \mp a$	a	b

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger}(a,b) &= -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\hbar}W'(x;a,b)\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{d}{dx} - a\tan(x) + b\cot(x)\right) .
\end{aligned} \tag{5.78}
$$

5.5.3 形状不変性をもつ模型のリスト

この章の最後に，形状不変性をもつ超対称量子力学系のリストを表 5.1 に挙げておく．ここに挙げたリストはすべてを網羅しているわけではないが，形状不変性をもつポテンシャルの特徴がつかめるだろう．形状不変性のチェックは読者に任せることにする．このリストに挙げた形状不変性は，すべてパラメータの定数シフト $a \to a_1 = a + c$ タイプのものばかりだ．多くの厳密に解ける模型はこのタイプに分類されるが，定数倍 $a \to a_1 = ka$ をもつポテンシャルもみつかっている*23)．

演習問題 5.2 表 5.1 の中から 1 つモデルを選んで，エネルギー固有値 $E_{n,+}$ とエネルギー固有関数 $\psi_{n,+}(x)$ を $n = 0, 1, 2$ に対して具体的に求めよ．また，それらがハミルトニアン H_+ の固有値方程式 $H_+\,\psi_{n,+}(x) = E_{n,+}\,\psi_{n,+}(x)$ を満たしていることを直接計算で確かめよ．

---

*23) もっともこの場合も，パラメータを $a' \equiv \log a$ と再定義すれば $a' \to a'_1 = a' + \log k$ となり，定数シフトのタイプとみなすことができる．形状不変性をもつ模型の，より完全なリストは，文献 [10] に与えられている．

第 6 章
対称性と保存量

この章を読む必要があるかどうかは，次の質問に答えられるかどうかで判断するとよいだろう．ハミルトニアン H と演算子 Q が可換 $[H, Q] = 0$ とする．この交換関係から導かれる物理的帰結の一つは，Q が時間によらない保存量であるということだ．では，この交換関係の意味するもう一つの物理的帰結は何か答えてもらいたい．これは保存量 Q の持つ別の物理的側面にかかわるものだ．即答できた人も次章の理解をより確実にするために，この章に目を通しておくことをお勧めする．

6.1 この章のあらまし

この章では，対称性と保存量の関係について，次章で必要とされる知識をまとめておいた．内容は他の章から独立しているので，好きなときに読むことができる．ただし，量子力学における対称性と保存量を熟知している人以外は，第 7 章に入る前にこの章を読んで理解しておくべきだ．

対称性，あるいは，不変性は現代物理学における指導原理として，もっとも基本的な概念の一つである．実際，**素粒子理論の一つの目的は自然のもつ対称性を完全に把握すること**である．対称性や不変性を議論するには，ハミルトニアンよりもラグランジアン，さらには，ラグランジアン L を時間で積分した作用積分 $S = \int dtL$ を使うほうが便利である．作用積分をもちいると，運動方程式は次の作用原理（あるいは最小作用の原理）に置き換えられる．

$$\delta S = 0\,.$$

このたった 1 つの式で，すべての運動方程式と同等の情報をもつ．まさに “原理” と呼ぶにふさわしいものだ．運動方程式が作用積分 S を使って上式のように与えられるということは，作用積分を不変にする変換があれば，その変換のもとで運動方程式は不変，すなわち，物理を変えないことになる．このとき，物

理系は対称性，あるいは，不変性をもつという．

連続的対称性（無限小変換が定義できる対称性）があれば，必ず時間によらない保存量が存在する．これはネーターの定理と呼ばれ，対称性と保存量を結ぶ非常に重要かつ美しい定理の一つである．よく知られたエネルギー保存や運動量保存は，時間座標と空間座標の並進不変性の帰結である．つまり，**時間や空間のもっている時空構造の性質が，エネルギーや運動量の保存を通じて物質の運動に影響を与えている**のである．

無限小変換のもとで作用積分が不変ならば，対応する保存量 Q が存在する．これはネーターの定理が保証してくれる．しかし，実はその逆も成り立っている．つまり，保存量 Q は，対応する無限小変換を引き起こす生成子としての役割をもつ．一般に任意の演算子 X に対して Q との交換関係をとると，それは X の無限小変換 δX を引き起こす．この観点からハミルトニアン H と Q との交換関係 $[H, Q] = 0$ を眺めると，この関係式は $\delta H = 0$ を意味する．これは，ハミルトニアン H がこの無限小変換のもとで不変，すなわち，この系には無限小変換のもとでの不変性が存在するということだ．これが，この章の冒頭での質問の答えである．

第 7 章では，対称性の観点から超対称性の本質が詳細に議論されている．この章をしっかりと身につけた上で第 7 章へ臨めば，超対称性に対するあなたの理解は格段に深まるに違いない．

6.2　不変性の原理

解析力学を学び立ての頃は，なぜ力学系を記述するのにわざわざラグランジアンやハミルトニアンを導入するのか理解できなかったかもしれない．それはもっともな感想だ．古典力学を考える限り，運動方程式が基本であり，ラグランジアンやハミルトニアンはあくまで数学的道具でしかない．ところが，量子力学へ移行すると事態は一変する．そこでは運動方程式は副次的なものに成り下がり，主役の座はハミルトニアンに取って代わられる．ハミルトニアン演算子の固有値はエネルギーに対応し，重要な物理量の一つである．ハミルトニアンは，ラグランジアンからルジャンドル変換によって定義されるが，一旦ハミルトニアンが得られればラグランジアンは忘れ去られるのが常だ．ラグランジアンはハミルトニアンと違って，エネルギーのような観測量とは直接結びついていない．その役割はいったい何なのだろうか？　その疑問に対する一つの答えが，この章で与えられる．そこでのキーワードは，対称性，あるいは，不変性だ．そもそもこの本の主題である「超対称性」もそうだが，これまで対称性という言葉をきちんと定義することなく使ってきた．この章で対称性/不変性について，正確な定義を与えることにする．**対称性 (symmetry)**，あるいは，

不変性 (invariance)[*1]は，現代物理学におけるもっとも重要な概念の一つである．自然の基本法則に対する理解は，対称性の重要性が明らかになるにつれて飛躍的に深まってきた．そして，我々がそこに見いだしたことは，**『宇宙の法則は不変性の原理にしたがう』**ということだ．対称性のもつ奥深い真理の一端を，これから垣間見ることにしよう．

6.3 運動方程式と作用原理

6.3.1 オイラー–ラグランジュ方程式

n 自由度 $\{x_a,\, a=1,2,\cdots,n\}$ の力学系[*2]を考え，次の運動方程式から出発することにしよう．

$$m_a\frac{d^2x_a}{dt^2}=F_a,\quad F_a=-\frac{\partial}{\partial x_a}V(x_1,\cdots,x_n),\quad (a=1,2,\cdots,n). \tag{6.1}$$

ここで，$V(x_1,\cdots,x_n)$ はポテンシャルエネルギーである．**ラグランジアン (Lagrangian)** L を次式で導入する．

$$L(x_1,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)\equiv\underbrace{\sum_{a=1}^{n}\frac{m_a}{2}\left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2}_{\text{運動エネルギー}}-\underbrace{V(x_1,\cdots,x_n)}_{\text{ポテンシャルエネルギー}}. \tag{6.2}$$

ここで，$\dot{x}\equiv dx/dt$ で，以下では変数に付けられたドット “˙” は時間微分を表すものと約束しておく．ラグランジアンをもちいると，運動方程式 (6.1) は次の**オイラー–ラグランジュ方程式 (Euler–Lagrange equation)** に書き換えられる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_a}=0,\qquad (a=1,2,\cdots,n). \tag{6.3}$$

ラグランジアン $L=L(x;\dot{x})$[*3]の中では，x_a と $\dot{x}_a$ は独立変数とみなしていることに注意しておけば，(6.3) 式から (6.1) 式を導くのはさほど難しくはないだろう．

6.3.2 作用積分と作用原理

ラグランジアンよりも，より基本的な量はラグランジアンを時間で積分した**作用積分 (action integral)**

$$S(x_1,\cdots,x_n)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dt\,L(x_1,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n), \tag{6.4}$$

---

*1) 対称性と不変性は，この本ではほぼ同じ意味で使われる．

*2) たとえば，N 個の質点が 3 次元空間内を運動している場合は，それぞれの質点の 3 次元座標 (x_i,y_i,z_i) $(i=1,2,\cdots,N)$ を総称して $\{x_a,\,a=1,2,\cdots,n=3N\}$ と表していると考えてもらいたい．

*3) 以下では $L(x_1,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)$ を簡単のため $L(x;\dot{x})$ と略記することがある．

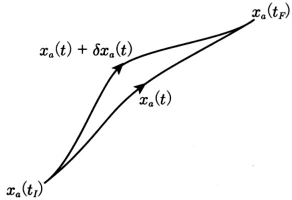


図 6.1 $x_a(t)$ に対する無限小変分．端点では $\delta x_a(t_I) = \delta x_a(t_F) = 0$ とする．通常は，端点の時間を $t_I = -\infty$, $t_F = +\infty$ にとる．

である．この作用積分をもちいると，オイラー–ラグランジュ方程式 (6.3) は次の**作用原理 (action principle)**[*4] から導かれることがわかる．

作用原理 (action principle)

粒子は作用積分 S が極値[*a)] を取るように運動する．すなわち，

$$\delta S = 0\,. \tag{6.5}$$

ここで，δ は任意の変分を表し，図 6.1 のように x_a の軌跡を無限小だけ変化させたものである．ただし，このとき時間の端点（$t = \pm\infty$）では x_a の変化量はゼロとする．

*a) 最大値だけでなく，最小値をとる場合もある．一般的には停留値である．

オイラー–ラグランジュ方程式の導出は後で行うとして，作用原理のもつ重要性についてコメントしておこう．(6.5) 式は驚くほど簡潔な条件式である．(6.1) 式や (6.3) 式のようにすべての自由度 x_a ($a = 1, \cdots, n$) に対する方程式を書き下す必要がない．たったひとつの式で十分なのである．**このシンプルさは「原理」と呼ぶに相応しい**．きちんと述べなかったが，運動方程式 (6.1) の形が成り立つのは，$\{x_a,\ a = 1, \cdots, n\}$ をデカルト座標[*5] に選んだ場合で，たとえば，極座標ではそのままでは正しくない．一方，作用原理から導かれるオイラー–ラグランジュ方程式は，どのような力学変数 $\{x_a,\ a = 1, \cdots, n\}$ を選んでもそのまま成り立つ．それは，作用原理 (6.5) が，力学変数の取り方に依存しない形式で書かれているからである[*6]．これも作用原理のもつ利点の一つだ．

---

*4) **最小作用の原理 (least action principle)** とも呼ばれる．

*5) いわゆる (x, y, z) 座標系のことだ．

*6) この事実はもっと深い意味をもつ．力学では，$\{x_a\}$ は粒子の位置などに対応するが，電磁気学（や場の理論）では時空座標に依存する電場 $\vec{E}(t, \vec{x})$ や磁場 $\vec{B}(t, \vec{x})$ などの場の量（より正確には，ベクトルポテンシャル $\vec{A}(t, \vec{x})$ やスカラーポテンシャル $\phi(t, \vec{x})$）が力学変数となる．このような理論に対しても作用原理はそのまま成り立つ．

≪ 変分原理からオイラー–ラグランジュ方程式の導出 ≫

では，約束通り，作用原理からオイラー–ラグランジュ方程式を導いておこう．作用原理 $\delta S=0$ は，より正確には $\delta S \equiv S(x_1+\delta x_1,\cdots,x_n+\delta x_n)-S(x_1,\cdots,x_n)=0$，すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(x+\delta x;\dot{x}+\delta\dot{x}) - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(x;\dot{x}) = 0 \tag{6.6}$$

である．δx_a は無限小量なので，左辺第 1 項の $L(x+\delta x;\dot{x}+\delta\dot{x})$ を δx_a および $\delta\dot{x}_a$ に関して展開して 1 次まで残すと

$$L(x+\delta x;\dot{x}+\delta\dot{x}) = L(x;\dot{x}) + \sum_{a=1}^{n}\Big(\delta x_a\frac{\partial L}{\partial x_a}+\delta\dot{x}_a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big) \tag{6.7}$$

となる．上式の右辺第 3 項を次のように変形しておく*7)．

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a} &= \frac{d\delta x_a}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\\ &= \frac{d}{dt}\Big(\delta x_a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)-\delta x_a\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big).\end{aligned} \tag{6.8}$$

(6.7) 式と (6.8) 式を (6.6) 式に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}0 &\overset{(6.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(x+\delta x;\dot{x}+\delta\dot{x}) - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(x;\dot{x})\\
&\overset{(6.7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\sum_{a=1}^{n}\Big(\delta x_a(t)\frac{\partial L}{\partial x_a}+\delta\dot{x}_a(t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)\\
&\overset{(6.8)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\Big\{\sum_{a=1}^{n}\delta x_a(t)\Big[\frac{\partial L}{\partial x_a}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)\Big]+\frac{d}{dt}\Big(\delta x_a(t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)\Big\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\sum_{a=1}^{n}\delta x_a(t)\Big[\frac{\partial L}{\partial x_a}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)\Big]\\
&\qquad +\delta x_a(t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big|_{t=\infty}-\delta x_a(t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big|_{t=-\infty}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\sum_{a=1}^{n}\delta x_a(t)\Big[\frac{\partial L}{\partial x_a}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{6.9}$$

ここで 5 番目の等式では，$\delta x_a(\pm\infty)=0$ をもちいた．$\delta x_a(t)$ は任意の変分なので上式が成り立つためには，(6.9) 式右辺の括弧の中身がゼロ，すなわち，オイラー–ラグランジュ方程式 (6.3) が成り立たなければならない．　Q.E.D.

後のネーターの定理のところで必要になるラグランジアンの性質についてコメントしておこう．それは『**ラグランジアンに任意の時間に関する全微分項を付け加えても運動方程式は不変**』ということだ．実際，

$$L(x;\dot{x}) \longrightarrow L'(x;\dot{x}) = L(x;\dot{x}) + \frac{d}{dt}K(x;\dot{x}) \tag{6.10}$$

と変更しても作用積分 S の変分 δS には寄与しない．なぜなら，

$$\begin{aligned}\delta\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\frac{d}{dt}K(x;\dot{x})\Big) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\frac{d}{dt}\delta K(x;\dot{x})\\ &= \delta K(x;\dot{x})\big|_{t=\infty}-\delta K(x;\dot{x})\big|_{t=-\infty}=0.\end{aligned} \tag{6.11}$$

*7) 変分は x_a に関してとられているので，$\dot{x}_a+\delta\dot{x}_a$ は正確には $\frac{d}{dt}(x_a+\delta x_a)$ と書くべきものである．したがって，$\delta\dot{x}_a=\frac{d}{dt}\delta x_a$ である．

最後の等式では，$\delta x_a(\pm\infty)=\delta\dot{x}_a(\pm\infty)=0$ をもちいた．ラグランジアンに含まれる時間の全微分項は，作用原理には影響しない．すなわち，運動方程式を変えない（= 物理を変えない）ということだ．この事実は，後の章でも頻繁に使われるのできちんと理解しておこう．

6.3.3　ラグランジアンからハミルトニアンへ

ハミルトニアンをラグランジアンから導くために，x_a に対する**正準共役運動量** p_a を定義しよう．

$$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}, \qquad (a=1,2,\cdots,n). \tag{6.12}$$

ハミルトニアンは，次の**ルジャンドル変換**によって，ラグランジアンから定義される．

$$H(x_1,\cdots,x_n;p_1,\cdots,p_n)\equiv\sum_{a=1}^{n}\dot{x}_a p_a - L(x_1,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n). \tag{6.13}$$

ルジャンドル変換とは，$\{x_a;\dot{x}_a;a=1,\ldots,n\}$ を独立変数とする関数 $L(x;\dot{x})$ から，$\{x_a;p_a;a=1,\ldots,n\}$ を独立変数とする新しい関数 $H(x;p)$ へ移る変換のことである．このことは H の無限小変分を取ってみると理解できる．

$$\begin{aligned}
\delta H &= \delta\Big(\sum_{a=1}^{n}\dot{x}_a p_a - L(x;\dot{x})\Big)\\
&= \sum_{a=1}^{n}\big(\delta\dot{x}_a p_a+\dot{x}_a\delta p_a\big)-\sum_{a=1}^{n}\Big(\delta x_a\frac{\partial L}{\partial x_a}+\delta\dot{x}_a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\Big)\\
&\overset{(6.12)}{=} \sum_{a=1}^{n}\Big(\dot{x}_a\delta p_a-\delta x_a\frac{\partial L}{\partial x_a}\Big).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

この結果から，H の無限小変分 δH は δx_a と δp_a にのみ依存し，$\dot{x}_a$ の変分 $\delta\dot{x}_a$ にはよらないことがわかる．ハミルトニアン $H(x;p)$ が $\dot{x}_a$ の依存性を持たないという性質は，第 7 章でフェルミ的自由度を導入したときに，変数の順番を決める際に重要となる．また，そのときに振り返ることにする．

6.4　対称性と保存量

6.4.1　ネーターの定理

物理法則の中には，保存則として知られる重要なものがある．たとえば，エネルギー保存則，運動量保存則，角運動量保存則などがよく知られた例である．これらの保存則はいったいどのような性質から得られたのであろうか？　単純に考えると，これらの法則は物質のもつ性質に由来するように思える．しかし，それは正しくない．意外なことに，時空構造のもつ不変性から導かれるのである．実際，下の対応関係で示されている通り，時空の不変性と保存則は 1 対 1 に対応している．

$$
\begin{array}{lcl}
\text{時間並進の不変性} & \Longleftrightarrow & \text{全エネルギーの保存,} \\
\text{空間並進の不変性} & \Longleftrightarrow & \text{全運動量の保存,} \\
\text{空間回転の不変性} & \Longleftrightarrow & \text{全角運動量の保存.}
\end{array}
\tag{6.15}
$$

この事実を初めて知ったときは，頭に衝撃が走ったのを覚えている．(6.15) 式の対応は，**時空構造が物質の運動に影響を与えている**ことを意味している．つまり，時空構造は物質がしたがうべき運動法則に制限（保存則）を与えているのである．以下では，対称性/不変性と保存則の間を結びつけるネーターの定理を紹介する．この定理は，**『物理系に連続的対称性があれば必ず対応する保存量が存在する』**ことを保証してくれる．この対称性と保存量の対応を，これから詳しくみていくことにしよう．

まず，ここで使われる「対称性」，あるいは，「不変性」の言葉の意味をはっきりさせておこう．議論を明確にするため，n 自由度 x_a $(a=1,\cdots,n)$ の力学系を考える．このとき，無限小変換*8)

$$
x_a \longrightarrow x'_a = x_a + \delta x_a, \qquad (a=1,2,\cdots,n), \tag{6.16}
$$

のもとで**『作用積分が不変ならば，物理法則，あるいは，その物理系は変換 (6.16) のもとでの対称性/不変性をもつ』**という．作用原理 $\delta S=0$ から運動方程式が導かれるのだから，運動方程式の不変性は作用積分 S の不変性によって保証される．また，作用積分の不変性は，時間の全微分項の不定性を除いて（(6.10) 式前後の議論参照）ラグランジアンの不変性と等価である．このことを頭に置いて，対称性と保存量の間を結ぶネーターの定理を眺めてほしい．対称性に関する定理の中で，もっとも重要で美しいものの一つである．

ネーターの定理 (Noether's theorem)

ラグランジアンが $x_a, \dot{x}_a$ $(a=1,\cdots,n)$ の関数 $L=L(x;\dot{x})$ で与えられているとする．ラグランジアンが次の無限小変換

$$
x_a \longrightarrow x'_a = x_a + \varepsilon\,\mathcal{G}_a(x;\dot{x}) \equiv x_a + \delta x_a, \tag{6.17}
$$

のもとで時間の全微分項を除いて不変であると仮定する．

$$
\delta L \equiv L(x+\delta x;\dot{x}+\delta\dot{x}) - L(x;\dot{x}) = \varepsilon\,\frac{d}{dt}\mathcal{K}(x;\dot{x}). \tag{6.18}
$$

ここで，ε は無限小変換のパラメータを表す．そのとき，次の**ネーター電荷 (Noether charge)** Q が保存する．

$$
Q \equiv \sum_{a=1}^{n} \mathcal{G}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} - \mathcal{K}, \qquad \frac{dQ}{dt} = 0. \tag{6.19}
$$

*8) ここでは，連続変換を考えていることになる．空間反転：$x_a \to -x_a$ のような離散的な変換の場合は無限小変換が定義できないので，以下で示すネーターの定理は成り立たない．ただし，離散的対称性の場合でも保存則に対応するものは存在する．たとえば，空間反転対称性（パリティ対称性）をもつ理論では，空間反転に関する偶奇性が保存する．

≪ ネーターの定理の証明 ≫

保存量 (6.19) を導くために必要なものは，オイラー–ラグランジュ方程式とラグランジアンの変化分 (6.18) を正しく評価することだ．

$$L(x+\delta x;\dot{x}+\delta\dot{x})-L(x;\dot{x})$$
$$=\sum_{a=1}^{n}\Big(\delta x_a\frac{\partial L}{\partial x_a}+\delta\dot{x}_a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)$$

（∵左辺第 1 項をテイラー展開して$\delta x_a, \delta\dot{x}_a$の 1 次まで残した）

$$=\varepsilon\sum_{a=1}^{n}\Big(\mathcal{G}_a\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)+\Big(\frac{d}{dt}\mathcal{G}_a\Big)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big)$$

（∵$\delta x_a=\varepsilon\mathcal{G}_a$とオイラー – ラグランジュ方程式 (6.3) をもちいた）

$$=\varepsilon\frac{d}{dt}\Big(\sum_{a=1}^{n}\mathcal{G}_a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}\Big). \tag{6.20}$$

一方，上式左辺は仮定より $\varepsilon\frac{d}{dt}\mathcal{K}$ に等しいので，ネーター電荷 Q が保存することがわかる．すなわち，

$$\frac{d}{dt}Q=\frac{d}{dt}\Big[\sum_{a=1}^{n}\mathcal{G}_a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}-\mathcal{K}\Big]=0.$$

Q.E.D.

6.5 対称性と保存量の例

対称性と保存量の関係を具体的にみるために，保存量の例としてお馴染みの運動量とエネルギーを考察しておこう．

6.5.1 空間並進不変性と全運動量の保存

n 個の質点が 3 次元空間上を運動している系を考え，それぞれの座標を $\boldsymbol{x}_a$ $(a=1,\cdots,n)$ としておく．ここでは，3 次元座標を表すのに太字の記号 $\boldsymbol{x}_a=(x_a,y_a,z_a)$ を使うことにする．このとき，無限小空間並進変換は次式で定義される．

$$\boldsymbol{x}_a\ \rightarrow\ \boldsymbol{x}'_a=\boldsymbol{x}_a+\boldsymbol{\varepsilon},\qquad (a=1,2,\cdots,n). \tag{6.21}$$

ここで $\boldsymbol{\varepsilon}$ は無限小の定数ベクトルである．この変換は空間座標の原点を $\boldsymbol{\varepsilon}$ だけずらすことを意味する．さて，(6.21) 式の空間並進のもとでラグランジアンが不変と仮定する*9)．このときのネーターの保存量 $\boldsymbol{Q}$ は*10)

$$\boldsymbol{Q}\equiv\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_a}=\sum_{a=1}^{n}\boldsymbol{p}_a\equiv\boldsymbol{P} \tag{6.22}$$

となる．ここで，2 番目の等式では正準共役運動量 $\boldsymbol{p}_a$ の定義 (6.12) をもちい，

*9) 時間並進不変性の場合と違って，空間並進不変性はいつでも成り立つわけではない．空間並進不変性は，ポテンシャル $V(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ が相対座標 $\boldsymbol{x}_a-\boldsymbol{x}_b$ $(a\neq b)$ のみの関数，すなわち，$V(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=V(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_n,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1}-\boldsymbol{x}_n)$ であることを要求する．

*10) 無限小パラメータ $\boldsymbol{\varepsilon}$ が 3 次元ベクトルなので，保存量 $\boldsymbol{Q}$ も 3 次元ベクトルとなる．

3 番目の等式は全運動量 $\boldsymbol{P}$ の定義である．したがって，保存量 $\boldsymbol{Q}$ は全運動量 $\boldsymbol{P}$ に等しいことがわかる．つまり，**空間並進のもとでの不変性が，全運動量の保存を保証してくれる**のである．

■ コメント ■

空間並進のもとで物理法則が不変ということは，空間座標の原点をどこにとっても物理法則が不変ということを意味する．つまり，空間に特別な点はないということだ．日本で成り立っている物理法則は，全世界はおろか宇宙の他の場所でも同じように成り立っているということである．これは物理を学ぶ上で嬉しい知らせだ．逆に，運動量の保存は，空間並進のもとで物理法則が不変であることを意味していることにも注意しておこう．

■

6.5.2 時間並進不変性と全エネルギーの保存

時間並進に対する無限小変換を次式で定義する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_a(t) \;\to\; \boldsymbol{x}'_a(t) &\equiv \boldsymbol{x}_a(t+\varepsilon) \\ &\simeq \boldsymbol{x}_a(t) + \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{x}}_a(t), \qquad (a = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{6.23}$$

時間並進の場合は，空間並進不変性と違って，ラグランジアンは不変ではない．ラグランジアンの変化分を計算すると

$$\begin{aligned} & L(\boldsymbol{x}'_a(t); \dot{\boldsymbol{x}}'_a(t)) - L(\boldsymbol{x}_a(t); \dot{\boldsymbol{x}}_a(t)) \\ \overset{(6.23)}{=}\; & L(\boldsymbol{x}_a(t) + \varepsilon\dot{\boldsymbol{x}}_a(t); \dot{\boldsymbol{x}}_a(t) + \varepsilon\ddot{\boldsymbol{x}}_a(t)) - L(\boldsymbol{x}_a(t); \dot{\boldsymbol{x}}_a(t)) \\ =\; & L(\boldsymbol{x}_a(t+\varepsilon); \dot{\boldsymbol{x}}_a(t+\varepsilon)) - L(\boldsymbol{x}_a(t); \dot{\boldsymbol{x}}_a(t)) \\ =\; & L(t+\varepsilon) - L(t) \\ \simeq\; & \varepsilon \frac{d}{dt} L. \end{aligned} \tag{6.24}$$

この結果から，時間並進の場合はラグランジアンは不変ではなく，ネーターの定理で $\mathcal{K} = L$ となっていることがわかる．したがって，ネーターの保存量 Q は，

$$\begin{aligned} Q &\equiv \sum_{a=1}^{n} \dot{\boldsymbol{x}}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_a} - \mathcal{K} \\ &= \sum_{a=1}^{n} \dot{\boldsymbol{x}}_a \cdot \boldsymbol{p}_a - L \\ &= H \end{aligned} \tag{6.25}$$

となる．ここで，2 番目の等式では正準共役運動量の定義 $\boldsymbol{p}_a = \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{x}}_a$ と $\mathcal{K} = L$ であること，最後の等式ではハミルトニアンの定義式 (6.13) をもちいた．したがって，予想されたようにハミルトニアン，すなわち，全エネルギー

が保存されることがわかる．

■コメント■

時間並進/推進のもとで物理法則が不変ということは，時間座標の原点をどこにとっても物理法則が不変ということを意味する．つまり，時間に特別な点はなく，今成り立っている物理法則は昔も成り立っており，これから先も同じ法則が成り立つということだ．逆に，エネルギー保存が成り立っているということは，時間によらず同じ物理法則が成り立つことを意味する．

■

6.6 保存量のもうひとつの役割 — 無限小変換の生成子 —

6.4 節では無限小変換（あるいは連続変換）のもとでの対称性/不変性は，保存量の存在を導くことをみた．

$$\begin{array}{ccc} \text{連続的対称性} & & \text{保存量} \\ x_a \to x'_a = x_a + \varepsilon \mathcal{G}_a & \xrightarrow{\text{ネーターの定理}} & Q = \sum_a \mathcal{G}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} - \mathcal{K} \end{array} \tag{6.26}$$

これはネーターの定理により保証される．それでは，この逆の対応関係は成り立つのだろうか？　すなわち，保存量が存在したとき，何らかの対称性の存在を保証してくれるのだろうか？

$$\text{連続的対称性} \quad \xleftarrow{?} \quad \text{保存量} \tag{6.27}$$

答えは Yes である．それをこれからみていこう．そのためにネーター電荷 Q の具体的表式

$$Q \equiv \sum_{a=1}^{n} \mathcal{G}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} - \mathcal{K} = \sum_{a=1}^{n} \mathcal{G}_a p_a - \mathcal{K} \tag{6.28}$$

が必要になる．2 番目の等式では正準共役運動量 $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}$ の定義をもちいた．$\mathcal{G}_a(x)$ および $\mathcal{K}(x)$ が $\dot{x}_a$ $(a = 1, \cdots, n)$ を含んでいない場合には量子化条件

$$\begin{aligned} &[\,p_a\,,\,x_b\,] = -i\hbar\,\delta_{ab}, \\ &[\,x_a\,,\,x_b\,] = [\,p_a\,,\,p_b\,] = 0, \qquad a, b = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{6.29}$$

と Q の表式 (6.28) から直ちに，$[\varepsilon Q, x_a] = -i\hbar\varepsilon\mathcal{G}_a$ が導け，x_a の無限小変換 δx_a が保存量 Q と x_a の交換関係で与えられることがわかる．すなわち，

$$\delta x_a = \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon Q\,,\,x_a\,]. \tag{6.30}$$

つまり，保存量 Q は，対応する対称性の無限小変換を引き起こす演算子（これを**無限小変換の生成子**と呼ぶ）としての役割も担っていたのである．したがって，対称性と保存量の間には次の 1 対 1 対応の関係が存在することがわかった．

対称性と保存量

$$\text{連続的対称性} \underset{\text{無限小変換の生成子}}{\overset{\text{ネーターの定理}}{\rightleftarrows}} \text{保存量} \tag{6.31}$$

$\mathcal{G}_a$ や $\mathcal{K}$ が $\dot{x}_a$ を含んでいる場合は (6.30) 式を直接導くことはできないが，その場合でもかなり一般的に成り立つことが知られている*11)．逆に保存量 Q が与えられたなら，(6.30) 式の右辺 $\frac{i}{\hbar}[\varepsilon Q\,,x_a]$ を無限小変換 δx_a の定義と考えてもよい．

それでは，ここでの結果を具体例で確かめてみよう．

1) 空間並進

空間並進不変性に対応する保存量は全運動量 $P=\sum_b p_b$ であった．(ここでは計算を楽にするために，3 次元空間ではなく 1 次元空間に限定して議論する．3 次元への拡張は自明であろう．) 上での議論から全運動量は空間並進変換を生成する演算子であると期待される．実際，(6.30) 式で $Q=P$ として計算すると

$$\begin{aligned} x'_a &= x_a + \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon P\,,x_a\,] = x_a + \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon\sum_{b=1}^{n} p_b\,,x_a\,] \\ &\overset{(6.29)}{=} x_a + \varepsilon \end{aligned} \tag{6.32}$$

となり，確かに運動量演算子は座標の無限小並進 (6.21) を引き起こしていることがわかる．

2) 時間並進

時間並進不変性に対する保存量はハミルトニアン H であった．このことから，ハミルトニアンは時間並進を生成する演算子/生成子であることがわかる．実際，(6.30) 式で $Q=H$ として計算すると

$$\begin{aligned} x'_a &= x_a + \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon H\,,x_a\,] = x_a + \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon\Big(\sum_{b=1}^{n}\frac{{p_b}^2}{2m_b}+V(x)\Big)\,,x_a\,] \\ &= x_a + \varepsilon\,\frac{p_a}{m_a} \end{aligned} \tag{6.33}$$

となる．ここでは，$H=\sum_b {p_b}^2/(2m_b)+V(x)$ と量子化条件 (6.29) をもちいた．上式で $p_a=m_a\dot{x}_a$ と置き換えれば，無限小時間並進 (6.23) を再現する．したがって，ハミルトニアンは無限小時間並進を生成する演算子とみなすことができる．

最後にここでの結果をまとめておこう．我々は，エネルギーと運動量の新し

*11) 九後汰一郎著『ゲージ場の量子論 I』培風館，演習問題 1.8 を参照．この点に関しては，一般論をあれこれ考えるよりも具体例で確かめるほうが実りが多い．

い物理的役割を知ったことになる．

$$\begin{aligned} \text{エネルギー} &= \text{時間並進変換の生成子}, \\ \text{運動量} &= \text{空間並進変換の生成子}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

■ コメント ■

ここまでくると，量子力学における対応規則の意味がよりいっそう明確にみえてくる．古典力学から量子力学への移行の際に，**対応規則** $H \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $p \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ を使ってシュレディンガー方程式を導いたと思う．そのとき，対応規則の意味はよくわからないけれども，言われるがままにそうういうものだと“覚えた”のではないだろうか．対称性と保存量の関係を知った今となっては，対応規則はもはや“自明な”対応に過ぎない．ハミルトニアンが無限小時間推進の生成子ということは時間微分に対応する演算子であり，運動量が無限小空間並進の生成子ということは空間微分に対応する演算子ということだ．

$$\begin{aligned} H &\leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \Longleftarrow \text{ハミルトニアンは時間並進変換の生成子} \\ p &\leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \Longleftarrow \text{運動量は空間並進変換の生成子} \end{aligned}$$

■

6.7 一般の演算子に対する変換

前節では，保存量 Q が座標 x_a に対する無限小変換の生成子であることを確かめた（(6.30) 式参照）．これを座標 x_a と運動量 p_a の任意関数の場合へ拡張しておこう．保存量 Q によって x_a と p_a $(a = 1, 2, \cdots, n)$ の無限小変換が

$$\delta x_a = \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon Q\,,\, x_a\,], \quad \delta p_a = \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon Q\,,\, p_a\,] \tag{6.35}$$

で与えられているとする*12)．このとき，$\{x_a, p_a;\, a = 1, 2, \cdots, n\}$ の任意関数 $A(x, p) \equiv A(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ に対する無限小変換 $\delta A(x, p)$ は次式で定義される．

$$\delta A(x, p) \equiv A(x + \delta x, p + \delta p) - A(x, p)\,. \tag{6.36}$$

以下で示すことは，保存量 Q が $A(x, p)$ に対しても (6.35) 式と同様に無限小変換の生成子として作用することである．すなわち，

$$\delta A(x, p) = \frac{i}{\hbar}[\,\varepsilon Q\,,\, A(x, p)\,]\,. \tag{6.37}$$

証明は以下の通りである．仮定として，$A(x, p)$ は $\{x_a, p_a;\, a = 1, 2, \cdots, n\}$ の

*12) 保存量 Q が与えられたなら，(6.35) 式の右辺で x_a と p_a の無限小変換を定義すると考えてよい．

多項式で与えられているとする．これは，$A(x,p)$ が $\{x_a, p_a\}$ に関してテイラー展開可能な関数であればいつでも成り立つ．表式を簡単化するために，$z_a \equiv x_a$, $z_{a+n} \equiv p_a$ $(a = 1, 2, \cdots, n)$ を導入する．まず初めに，$A(z) \equiv A(x,p)$ として $\{z_a\}$ に関する N 次の単項式 $A(z) = z_{a_1} z_{a_2} \cdots z_{a_N}$ を考えてみよう．(6.36) 式の定義にしたがって，$A(z)$ の無限小変換を計算してみると

$$
\begin{aligned}
\delta A(z) &\overset{(6.36)}{=} (z_{a_1} + \delta z_{a_1})(z_{a_2} + \delta z_{a_2}) \cdots (z_{a_N} + \delta z_{a_N}) - z_{a_1} z_{a_2} \cdots z_{a_N} \\
&= \sum_{k=1}^{N} z_{a_1} \cdots z_{a_{k-1}} \, \delta z_{a_k} \, z_{a_{k+1}} \cdots z_{a_N} \\
&\overset{(6.35)}{=} \sum_{k=1}^{N} z_{a_1} \cdots z_{a_{k-1}} \left[\frac{i}{\hbar} \varepsilon Q \, , \, z_{a_k} \right] z_{a_{k+1}} \cdots z_{a_N} \\
&= \left[\frac{i}{\hbar} \varepsilon Q \, , \, z_{a_1} z_{a_2} \cdots z_{a_N} \right] \\
&= \left[\frac{i}{\hbar} \varepsilon Q \, , \, A(z) \right]
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

となる．ここで，2 番目の等式では δz_a の 2 次以上の項は無視した．4 番目の等式を示すには，3 番目の等式の右辺の交換関係を定義にしたがってばらすとよい．ほとんどの項は両隣で相殺し，残った項が 4 番目の等式の右辺を与えることがわかる．上では $A(z)$ が単項式の場合に (6.37) 式を証明したが，一般の多項式でも同様に成り立つ．その証明は難しくないので読者に任せることにする．

第 7 章
超対称量子力学
— ラグランジアン形式 —

量子力学とはシュレディンガー方程式を解くことだと思っている人には，この章の内容は未知の世界に属するものだろう．ハミルトニアンは脇に追いやられ，シュレディンガー方程式に至っては名前すら出てこない．主役の座はラグランジアン，より正確には作用積分に取って代わられる．一体何がこの章で議論されているのか，とくとご覧あれ．

7.1 この章のあらまし

超対称性を，文字どおり，対称性の観点から深く理解したいと思うなら，この章は必須である．初等的な量子力学の教科書では，これから展開されるような議論にお目にかかることはほとんど無いだろう．しかし，対称性の観点からすると，解析の仕方は極めて標準的なものだ．ただし，豊富な構造を超対称性はもっているため，非常に多岐にわたる考察を必要とする．そのため，この章はこの本の中で，量とともにもっとも中身の濃いものになっている．この章（と次章）が制覇できたなら，超対称量子力学をよく知っていると公言してもかまわない．私がそれを保証しよう*1)．

前章でみたように，対称性の観点からはハミルトニアンよりもラグランジアン形式のほうが適している．第 4 章では $N = 2$ 超対称量子力学模型（ウィッテン模型）の性質をハミルトニアン形式で詳しく議論した．そこでは，ハミルトニアンや超電荷の満たす代数的関係式 (4.9) 式，あるいは，(4.20) 式が重要な役割を果たしていた．この章では，ラグランジアン形式でウィッテン模型を再定式化する．それによって，ハミルトニアン形式では見えなかった超対称性の美しい理論構造が鮮明に浮かび上がってくる．実際，超対称性の本質の理解には，ラグランジアン形式での議論が不可欠だ．第 4 章で定義したウィッテン模

*1) 本書と文献 [10]～[12] の中からもう一冊マスターしたなら，あなたは超対称量子力学の専門家の仲間入りだ．

型のハミルトニアンは行列を使って表されていた．一方，ラグランジアン形式での作用積分は，**グラスマン数** $\eta, \eta^\dagger$ と補助場 F を新たに導入して，次式で与えられる．

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + W'(q)F + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\,\eta^\dagger\eta \right\}. \qquad (7.1)$$

この作用積分が第 4 章で定義したウィッテン模型と等価であることは，7.10 節で証明される．グラスマン数とは互いに**反可換**な量で次式を満たす．

$$\{\,\eta\,,\,\eta^\dagger\,\} = \{\,\eta\,,\,\eta\,\} = \{\,\eta^\dagger\,,\,\eta^\dagger\,\} = 0\,. \qquad (7.2)$$

グラスマン数のもつ反可換性が，フェルミ粒子のしたがうフェルミ–ディラック統計性を導くことがわかっている*2)．そこで，$\eta, \eta^\dagger$ をこの章ではフェルミ的変数，q, F をボース的変数と呼ぶこともある．グラスマン数は通常の数とは違った不思議な性質を満たす．それらの数学的諸性質については，7.3 節にまとめられているので，必要なときに随時参照すると良いだろう．

作用積分 (7.1) のもっとも重要な特徴は，次の**超対称性変換**のもとでの不変性にある．

$$\begin{cases} \delta q = \varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta\,, \\ \delta\eta = \varepsilon(i\dot{q} + F)\,, \\ \delta\eta^\dagger = \varepsilon^\dagger(-i\dot{q} + F)\,, \\ \delta F = -i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger - i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}\,. \end{cases} \qquad (7.3)$$

ここで，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ は無限小グラスマン数である．注目すべき点は，ボース的変数 q, F の超対称性変換 $\delta q, \delta F$ の中に，フェルミ的変数 $\eta, \eta^\dagger$ が含まれていること（および，その逆）である．これが超対称性と呼ばれる対称性の特徴である．また，第 4 章でみたハミルトニアン形式での $N = 2$ 超対称性代数 (4.20) と (7.3) 式の変換が，等価な内容を持っていることも示すことができる．前章でみたように，無限小変換のもとでの不変性は，ネーターの定理より，保存量の存在を導く．このときの保存量が超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ に他ならない．第 3 章と第 4 章では，ハミルトニアンと可換な保存量として超電荷を導入したが，その起源については何も語らなかった．ラグランジアン形式では超電荷の起源は明白であり，超対称性変換のもとでの不変性に由来するものである．超電荷の物理的意味はそれだけではない．超電荷は**超対称性変換を引き起こす生成子**というもう一つの側面を持つ．この観点から $[H, \mathcal{Q}] = [H, \mathcal{Q}^\dagger] = 0$ を眺めると，別の側面がみえてくる．量子力学の教科書では，通常この式の意味としては，$\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}^\dagger$ が時間によらない保存量であると記述しているだろう．実は，この式にはもう一つの解釈が可能で，『超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ によって引き起こされる超対称性変換のもとでハミルトニアンが不変』ということも意味する．この 2 つの側面がすぐに頭に浮かぶようになれば，量子力学における対称性の理解は格段に増していることに

*2)　このことは，場の量子論で初めて明確に理解される．

なる．

ここまで来ると少し欲が出てくる．作用積分 (7.1) は確かに超対称性変換 (7.3) のもとで不変だ．しかし，その不変性は自明というにはほど遠い．一目で超対称性の存在がわかるような方法はないものだろうか？　実にわがままな要求だが，そのような方法は存在する．それは，**Q-完全形式**と呼ばれるもので，作用積分 (7.1) を次のように書き直したものだ．

$$S = \delta_{Q^\dagger}\delta_Q \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[-\frac{1}{2}\,\eta^\dagger\eta + W(q)\right] = -\delta_Q\,\delta_{Q^\dagger}\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[-\frac{1}{2}\,\eta^\dagger\eta + W(q)\right].$$

$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ は (7.3) 式で $\delta\mathcal{O} \equiv \varepsilon\delta_{Q^\dagger}\mathcal{O} - \varepsilon^\dagger\delta_Q\mathcal{O}$ $(\mathcal{O} = q, \eta, \eta^\dagger, F)$ とおいて，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ を取り除いて定義された変換である．たとえば，(7.3) 式の δq から $\delta_{Q^\dagger} q = \eta^\dagger, \delta_Q q = \eta$ である．上の作用積分の表示では，超対称性変換の不変性 $\delta_Q S = \delta_{Q^\dagger} S = 0$ は，$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ のベキ零性 $\delta_Q^{\,2} = \delta_{Q^\dagger}^{\,2} = 0$ の自明な帰結にすぎない．何とも不思議な表示が存在するものである．

超対称性はエネルギースペクトラムの縮退を引き起こすが，他にも超対称性の存在から導かれる帰結はないだろうか？　一般に不変性が存在すると，期待値の間に非自明な関係 ——**ワード–高橋関係式**—— が成り立つことが知られている．また，超対称性理論には**ニコライ変換**と呼ばれる不思議な性質を満たすボース的変数変換が存在する．この変換は，**経路積分表示**[*3)]で初めてみえてくるものである．これらの話題については，最後の 2 つの節で紹介することにしよう．

7.2　ラグランジアン形式でのウィッテン模型

7.2.1　超対称作用積分

第 4 章ではウィッテン模型をハミルトニアン形式をもちいて詳しく解析したが，この章ではラグランジアン形式で再定式化する．後の 7.10 節で証明するが，第 4 章でのハミルトニアン (4.1) を導く作用積分（およびラグランジアン）は次式で与えられる[*4)]．

$N = 2$ 超対称作用積分

$$S[q, \eta, \eta^\dagger, F] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(q, \eta, \eta^\dagger, F)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + W'(q)F + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\,\eta^\dagger\eta\right\}. \quad (7.4)$$

---

*3)　経路積分表示は，ディラックが発見し，後にファインマンによって完成され，第 3 の量子化法とも呼ばれる．

*4)　ラグランジアンは $\{q, \eta, \eta^\dagger, F; \dot{q}, \dot{\eta}, \dot{\eta}^\dagger, \dot{F}\}$ の関数とみなすべきなので，$L = L(q, \eta, \eta^\dagger, F; \dot{q}, \dot{\eta}, \dot{\eta}^\dagger, \dot{F})$ と書くべきだが，ここでは省略して $L = L(q, \eta, \eta^\dagger, F)$ と記すことにする．

このラグランジアンに関して，これから順を追って詳しく説明していくので，ここではとりあえず認めてもらって先に進むことにする．できるだけ超対称性の特徴に焦点を絞って解析を進めていきたいので，重要でない質量 m は変数 q に吸収してラグランジアンに現れないようにした．質量を復活させたい場合には，$q(t)=\sqrt{m}x(t)$ の置き換えを行えばよい．(7.4) 式に現れるドット "·" とプライム "′" はそれぞれ時間微分と q 微分を略記 ($\dot{q}(t)=\frac{dq(t)}{dt}, \dot{\eta}(t)=\frac{d\eta(t)}{dt}, W'(q)=\frac{\partial W(q)}{\partial q}, W''(q)=\frac{\partial^2 W(q)}{\partial q^2}, \cdots$) したものである．

ここで良い知らせがある．まずは，付録の (A.1) 式を見てもらいたい．これは Wess–Zumino 模型と呼ばれる場の量子論における超対称性模型の一例だ．細々した違いは多々あるが，(7.4) 式での変数 q を ϕ に置き換えると，(7.4) 式と (A.1) 式の間の類似性は明らかだろう．超対称量子力学は，超対称場の量子論からかけ離れたものではないということだ．残念ながら悪い知らせもある．これまでもコメントしてきたことだが，(A.1) 式の η は 2 成分を持ち，この 2 成分の自由度はフェルミ粒子の持つスピン $\hbar/2$ の上向き成分と下向き成分の 2 つの自由度に対応する．このスピンの自由度が超対称量子力学では，落ちてしまって見えなくなっている．しかし，フェルミ粒子の自由度 η は (7.4) 式でも残されている．これは悪くないニュースだ．

7.2.2 ボース的変数とフェルミ的変数

作用積分 (7.4) には 4 つの自由度が現れている．

$$q(t)\ :\ \text{実ボース的変数}$$
$$\eta(t), \eta^\dagger(t)\ :\ \text{複素フェルミ的変数}$$
$$F(t)\ :\ \text{実ボース的変数}$$

ここで**ボース的変数 (bosonic variable)** とは古典レベルでは互いに可換な量を指し，**フェルミ的変数 (fermionic variable)** とは互いに反可換（ボース的変数とは可換）な量のことである．より正確には，ボース的変数を a_i $(i=1,2,\cdots)$，フェルミ的変数を η_α $(\alpha=1,2,\cdots)$ としたとき，量子化前の古典的レベル*5)では次の関係を満たす変数として定義される．

$$a_i a_j = +a_j a_i \quad \text{あるいは} \quad [\,a_i\,,\,a_j\,]=0, \tag{7.5a}$$
$$a_i \eta_\alpha = +\eta_\alpha a_i \quad \text{あるいは} \quad [\,a_i\,,\,\eta_\alpha\,]=0, \tag{7.5b}$$
$$\eta_\alpha \eta_\beta = -\eta_\beta \eta_\alpha \quad \text{あるいは} \quad \{\,\eta_\alpha\,,\,\eta_\beta\,\}=0. \tag{7.5c}$$

ただし，量子化後は，(7.5a) 式と (7.5c) 式の右辺はゼロとは限らない．たとえば，座標 x と運動量 p は量子化前は可換 $[x,p]=0$ だが，正準量子化後は

*5) 量子化前の古典的レベルと呼んだが，反可換な量を持ち込んだ時点で "古典的" とは言えないかもしれない．

$[x,p]=i\hbar$ に置き換えられる．(7.5c) 式（と (7.5b) 式）にしたがう量 $\{\eta_\alpha\}$ を**グラスマン数 (Grassmann number)** と呼ぶ．グラスマン数の特徴は反可換性：$\eta_\alpha\eta_\beta=-\eta_\beta\eta_\alpha$ にあるが，特に $\alpha=\beta$ としたときはベキ零性

$$(\eta_\alpha)^2=0\,,\qquad (\alpha=1,2,\cdots) \tag{7.6}$$

を満たす．これらの性質は，作用積分 (7.4) が超対称性変換のもとで不変であることを証明するときに，重要な役割を果たす．超対称性変換の定義は 7.5 節で与える．

(7.5c) 式を満たす η_α をなぜフェルミ的変数と呼ぶかは，フェルミ粒子のもつ統計性を考えると理解できる．たとえば，2 個の同種フェルミ粒子の座標を入れ替えると，波動関数にマイナス符号がつく．この**フェルミ–ディラック統計**の性質は，フェルミ的変数のもつ反可換性 $\eta_\alpha\eta_\beta=-\eta_\beta\eta_\alpha$ から導かれる．また，**パウリの排他原理**は 2 個の同種フェルミ粒子が完全に同一の量子状態をとることができないことを要請するが，この性質は，(7.6) 式のベキ零性の帰結である．フェルミ粒子とフェルミ的変数の間の対応を理解するには，量子力学から場の量子論への拡張が不可欠である．残念ながら場の量子論はこの本のレベルを超えるのでこれ以上の説明はできないが，フェルミ粒子のもつ統計性の起源を，反可換性 (7.5c)（および，ベキ零性 (7.6)）に垣間見ることができたのではないだろうか．興味を持った読者は，この本に続いて場の量子論へと挑戦してみよう．

7.3 グラスマン数とその性質

グラスマン数は通常の数と違って不思議な性質をいろいろもつ．この節では，グラスマン数の性質についてまとめておくことにする．グラスマン数について何か知りたいときは，この節に戻ってくるとよい．

7.3.1 グラスマン数の偶奇性

前節で定義したように，グラスマン数 η_α $(\alpha=1,2,\cdots)$ は互いに反可換な量である．

$$\eta_\alpha\eta_\beta=-\eta_\beta\eta_\alpha \quad \text{あるいは} \quad \{\eta_\alpha\,,\,\eta_\beta\}=0\,. \tag{7.7}$$

特に，$\alpha=\beta$ のときは次のベキ零性を満たす．

$$(\eta_\alpha)^2=0\,,\qquad (\alpha=1,2,\cdots)\,. \tag{7.8}$$

また，グラスマン数と通常の数とは可換である．

グラスマン数の概念を拡張しておくと便利である．グラスマン数と反可換（可換）な量を**グラスマン奇（偶）(Grassmann-odd (-even))** と呼ぶ．すなわ

ち，η を任意のグラスマン数として

$$X\eta = \begin{cases} -\eta X\,, & X：グラスマン奇 \\ +\eta X\,, & X：グラスマン偶 \end{cases} \tag{7.9}$$

である．この定義からグラスマン数自身はグラスマン奇であり，グラスマン奇の量はグラスマン数とみなしてもかまわない．また，グラスマン数の積に関して，次の性質が成り立つ．

$$\eta_{\alpha_1}\eta_{\alpha_2}\cdots\eta_{\alpha_l} : \begin{cases} グラスマン奇 & l = 奇数 \\ グラスマン偶 & l = 偶数 \end{cases} \tag{7.10}$$

この性質は，2つのグラスマン数の積 $\eta_{\alpha_1}\eta_{\alpha_2}$ がグラスマン偶であることから示すことができる．なぜなら，偶数個のグラスマン数の積はグラスマン数のペアを組んでいけば最終的にグラスマン偶の量の積 $(\eta_{\alpha_1}\eta_{\alpha_2})(\eta_{\alpha_3}\eta_{\alpha_4})\cdots(\eta_{\alpha_{l-1}}\eta_{\alpha_l})$ に書き表すことができ，奇数個のグラスマン数の積はグラスマン偶のペアの積と1つ残ったグラスマン数との積 $(\eta_{\alpha_1}\eta_{\alpha_2})\cdots(\eta_{\alpha_{l-2}}\eta_{\alpha_{l-1}})\,\eta_{\alpha_l}$ で書き表せるからである．

2つのグラスマン数の積がグラスマン偶になるという性質を覚えておくと，実際の計算を行う際に役に立つ．それは，グラスマン数はその反可換性のため，変数の順番を入れ替えたときの符号を常に気にしなければならないが，2つのグラスマン数の積をひとまとめにして考えるならば，(グラスマン偶の量なので) 変数の順番を気にする必要がなくなるからである．このことを頭に入れておくと，いろんな場面で計算を楽にしてくれる．覚えておいて損はないテクニックだ．

7.3.2 グラスマン数の微分

次にグラスマン数の微分について考察してみよう．グラスマン数の微分は通常の数の微分と同じように定義される．

$$\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\,\eta_\beta = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{7.11}$$

この微分の定義から，グラスマン数の微分もグラスマン奇であることがわかる．なぜなら，上式右辺はグラスマン偶の量なので，左辺がグラスマン偶となるためには $\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}$ がグラスマン奇でなければならないからである．したがって，グラスマン数の微分同士は反可換である[*6]．

$$\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta_\beta} = -\frac{\partial}{\partial\eta_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\,, \tag{7.12a}$$

特に，上式で $\alpha = \beta$ とおいた式から

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\right)^2 = 0\,, \tag{7.12b}$$

---

*6) グラスマン数の性質 $\eta_\alpha\eta_\beta = -\eta_\beta\eta_\alpha$ と矛盾しないためにも，(7.12a) 式の関係が成り立たなければならない．

となることがわかる*7)．また，関数の積の微分は注意が必要だ．

$$\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}(AB)=\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}A\right)B+A\left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}B\right), & A：グラスマン偶\\ \left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}A\right)B-A\left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}B\right), & A：グラスマン奇\end{cases} \tag{7.13}$$

A がグラスマン奇のときは，微分 $\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}$ が A を飛び越えるときにマイナス符号が必要なことを忘れないようにしよう．

ここで微分記号の表記の仕方について，アドバイスしておこう．グラスマン数の微分はグラスマン奇なので，その順番，あるいは，その位置は重要である．そのため，グラスマン数の順番が明確な書き方を心掛けるべきだ．たとえば，次のような書き方は誤解を招きやすい．

$$順番が明確でない記法：\frac{\partial^2}{\partial\eta_\beta\partial\eta_\alpha},\ \partial^2/\partial\eta_\beta\partial\eta_\alpha,\ \frac{\partial A}{\partial\eta_\alpha},\ \partial A/\partial\eta_\alpha.$$

おすすめの書き方は，

$$誤解のない記法：\frac{\partial}{\partial\eta_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha},\ \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}A,$$

である．慣れないうちは，面倒でも誰が見ても順番に誤解が生じない表記に努めよう．

7.3.3 グラスマン数の関数

グラスマン数 η の関数 $f(\eta)$ を考えよう．$f(\eta)$ を η に関してベキ展開すると，次の展開式をもつはずだ*8)．

$$f(\eta)=f_0+\eta f_1. \tag{7.14}$$

なぜなら，グラスマン数の性質より $\eta^2=0$ なので，η の高次項は恒等的にゼロとなるからである．このとき，展開係数 f_0 と f_1 は η によらない定数だが，f_0 と f_1 は異なるグラスマン偶奇性をもつことに注意しよう*9)．すなわち，f_0 がグラスマン偶（奇）ならば，f_1 はグラスマン奇（偶）である．また，$f(\eta)$ がグラスマン偶のときは，η と f_1 はともにグラスマン奇なので，その順番に気を付けなければならない．η の高次項が現れないという性質のため，通常の関数にはない関係式が成り立つ．たとえば，η,ε をグラスマン数とすると，次の関数はすべて等しくなる．

$$1+\varepsilon\eta=\left(1+\frac{1}{n}\varepsilon\eta\right)^n=\frac{1}{1-\varepsilon\eta}=e^{\varepsilon\eta}. \tag{7.15}$$

---

*7) グラスマン数はベキ零性 $(\eta_\alpha)^2=0$ にしたがうので，η_α の 2 階微分は常にゼロとみなしてよいということだ．

*8) この本全体を通じて，ベキ展開可能な関数のみを考える．

*9) 関数 $f(\eta)$ が定まったグラスマン偶奇性をもっていることを前提にしている．グラスマン奇の量とグラスマン偶の量の足し算は，グラスマン偶奇性が定義されないので，物理量にはそのような和が現れることはない．

演習問題 7.1　上の等式 (7.15) を確かめよ．ただし，それぞれの関数は通常のテイラー展開が成り立つものとする．

2 変数グラスマン関数 $g(\eta_1, \eta_2)$ も同様に

$$g(\eta_1, \eta_2) = g_0 + \eta_1\, g_1 + \eta_2\, g_2 + \eta_1 \eta_2\, g_{12}\,, \tag{7.16}$$

と一般に展開できる．これら以外の η_1, η_2 に関する高次項は，$(\eta_1)^2 = (\eta_2)^2 = 0$ の性質から恒等的にゼロである．上式の展開係数 g_0, g_1, g_2, g_{12} は関数 $g(\eta_1, \eta_2)$ から逆に，次のように求めることができる．

$$g_0 = g(\eta_1, \eta_2)\Big|_{\eta_1=\eta_2=0}\,, \tag{7.17a}$$

$$g_1 = \frac{\partial}{\partial \eta_1} g(\eta_1, \eta_2)\Big|_{\eta_1=\eta_2=0}\,, \tag{7.17b}$$

$$g_2 = \frac{\partial}{\partial \eta_2} g(\eta_1, \eta_2)\Big|_{\eta_1=\eta_2=0}\,, \tag{7.17c}$$

$$g_{12} = \frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{\partial}{\partial \eta_1} g(\eta_1, \eta_2)\Big|_{\eta_1=\eta_2=0}\,. \tag{7.17d}$$

合成関数の微分の公式も与えておこう．$\Phi(\eta)$ を η の関数，$F(\Phi(\eta))$ を $\Phi(\eta)$ の関数としておく．このとき，通常の微分と同じ合成関数の微分の公式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial \eta} F(\Phi(\eta)) = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \Phi(\eta)\right) \frac{\partial}{\partial \Phi} F(\Phi)\Big|_{\Phi=\Phi(\eta)}\,. \tag{7.18}$$

後で議論するネーターの定理や第 8 章での超場形式における超対称性変換不変性の証明で，グラスマン数を含んだ関数のテイラー展開の公式が必要になる．いろんな場面で使える公式なので，ここでその公式と証明を与えておこう．$f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ を変数 z_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ の任意関数とする．そのとき，z_α は，グラスマン偶でも奇でもどちらでもかまわない．δz_α をその微小変化分としたとき，$f(z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \cdots, z_n + \delta z_n)$ に対して次の展開が成り立つ．

$$\begin{aligned} & f(z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \cdots, z_n + \delta z_n) \\ & = f(z_1, z_2, \cdots, z_n) + \sum_{\alpha=1}^{n} \delta z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} f(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\ & \quad + (\delta z_\beta \text{ の 2 次以上の項})\,. \end{aligned} \tag{7.19}$$

一見すると単なるテイラー展開の 1 次までとった式にみえるが，1 つだけ自明でない点がある．それは右辺第 2 項の δz_α の位置である．上式に書かれているように，δz_α は一番左の位置になければならない．これ以外の位置，たとえば，一番右に δz_α をもっていくと z_α がグラスマン数の場合は一般に正しいとは限らない．

≪ (7.19) 式の証明 ≫

$f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が $\{z_\alpha\}$ の多項式関数の場合をここでは仮定する．これは $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が $\{z_\alpha\}$ に関してテイラー展開可能な場合も含むので，我々の目的のためにはこれで十分だ．このとき，(7.19) 式の証明のためには多項式関数一般で証明する必要はなく，$f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が $\{z_\alpha\}$ の単項式

$$f(z_1, z_1, \cdots, z_n) = a\, z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \cdots z_{\alpha_l}\,,$$

の場合で証明できれば，一般の多項式でも同様に成り立つことは自明であろう．ここで，a は z_α によらない定数で，グラスマン偶でも奇でもかまわない．$\{z_\alpha\}$ はグラスマン数の場合も含んでいるので，順番を変えるときには注意が必要である．z_α の微小変化分を δz_α として $f(z_1 + \delta z_1, \cdots, z_n + \delta z_n)$ を次のように展開する．

$$\begin{aligned}
&f(z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \cdots, z_n + \delta z_n) \\
&= a\,(z_{\alpha_1} + \delta z_{\alpha_1})(z_{\alpha_2} + \delta z_{\alpha_2}) \cdots (z_{\alpha_k} + \delta z_{\alpha_k}) \cdots (z_{\alpha_l} + \delta z_{\alpha_l}) \\
&= f(z_1, z_2, \cdots, z_n) + \sum_{k=1}^{l} a\, \underbrace{z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \cdots \delta z_{\alpha_k}}_{k} \cdots z_{\alpha_l} \\
&\quad + (\delta z_\beta \text{ の 2 次以上の項})\,.
\end{aligned}$$

ここで，$\delta z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ の組み合わせは，z_α がグラスマンの偶奇によらず，グラスマン偶の量であることに注意すると，次の関係式を満たすことがわかる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{n} \delta z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(a\, z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \cdots z_{\alpha_k} \cdots z_{\alpha_l}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{l} a\, \underbrace{z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \cdots \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \delta z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\, z_{\alpha_k}\right)}_{k} \cdots z_{\alpha_l} \\
&= \sum_{k=1}^{l} a\, \underbrace{z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \cdots \delta z_{\alpha_k}}_{k} \cdots z_{\alpha_l}\,.
\end{aligned}$$

上の二式を組み合わせれば，(7.19) 式が成り立つことがわかる．　Q.E.D.

7.3.4 エルミート共役/複素共役

グラスマン数にも実グラスマン数と複素グラスマン数が存在する．2 つの実グラスマン数 η_1, η_2 から複素グラスマン数 $\eta \equiv \eta_1 + i\eta_2$ を作ることができる．逆に複素グラスマン数 η, η^* から実グラスマン数を $\eta_1 = \frac{1}{2}(\eta + \eta^*), \eta_2 = \frac{1}{2i}(\eta - \eta^*)$ と定義することもできる．以下では，エルミート共役について解説するが，グラスマン数に関しては複素共役 $*$ とエルミート共役 $\dagger$ は同じものと思ってもらってよい．区別する必要があるときは，その場で述べることにする．

エルミート共役（複素共役でも以下の性質は同じ）は，変数の和や積に対して次のように作用する．

$$(X + Y)^\dagger = X^\dagger + Y^\dagger, \tag{7.20a}$$

$$(X_1 X_2 \cdots X_n)^\dagger = X_n^\dagger \cdots X_2^\dagger X_1^\dagger. \tag{7.20b}$$

これらの性質は，$X, Y, X_1, X_2, \cdots$ がグラスマン偶でも奇でもどちらでも成り

立つ．特に，グラスマン数 η_1, η_2 に対しては

$$(\eta_1 \eta_2)^\dagger = \eta_2^\dagger \eta_1^\dagger = -\eta_1^\dagger \eta_2^\dagger \tag{7.21}$$

となることに注意しよう．

では，グラスマン数のエルミート共役に慣れるために，作用積分 (7.4) のエルミート性 ($S^\dagger = S$) の確認をしてみよう．作用積分 S のエルミート性が自明でない部分は，作用積分の中の $i\eta^\dagger\dot{\eta}$ 項と $W''(q)\eta^\dagger\eta$ であろう．(他の項は通常の実変数のみからなるので，エルミート性は自明だ．) $i\eta^\dagger\dot{\eta}$ と $W''(q)\eta^\dagger\eta$ のエルミート共役をとると，

$$(i\eta^\dagger\dot{\eta})^\dagger \overset{(7.20b)}{=} -i\dot{\eta}^\dagger\eta = i\eta^\dagger\dot{\eta} + \frac{d}{dt}\left[-i\eta^\dagger\eta\right],$$
$$(W''(q)\eta^\dagger\eta)^\dagger \overset{(7.20b)}{=} \eta^\dagger\eta(W''(q))^\dagger = W''(q)\eta^\dagger\eta,$$

となる．ここで，1 行目 2 番目の等式では部分積分をもちいた．また，2 行目 2 番目の等式では，q はグラスマン偶の実変数，$W''(q)$ は実関数であることをもちいた．これらの結果から，作用積分のエルミート性 $S^\dagger = S$ が証明されたことになる．ただし，上式 1 行目の右辺第 2 項の時間の全微分項から表面項 $\left[-i\eta^\dagger(t)\eta(t)\right]_{t=-\infty}^{t=\infty}$ が残るが，この項は $\eta(t=\pm\infty) = \eta^\dagger(t=\pm\infty) = 0$ を要請することによって無視することができる*10)．上の証明から，作用積分 S はエルミートだが，ラグランジアン自身はエルミートではないことがわかる．実際，$L^\dagger = L + \frac{d}{dt}(-i\eta^\dagger\eta)$ となる．もし，ラグランジアンをエルミートにしたければ，運動項 $i\eta^\dagger\dot{\eta}$ を $\frac{i}{2}(\eta^\dagger\dot{\eta} - \dot{\eta}^\dagger\eta)$ に置き換えればよい．ただし，この差は時間の全微分項 $\frac{d}{dt}(-\frac{i}{2}\eta^\dagger\eta)$ に等しいので，作用積分の意味ではどちらを採用しても同じ物理を記述する（脚注 *10）を参照)．

7.3.5 グラスマン数の積分

7.13 節のニコライ変換と第 8 章で導入される超空間上の作用積分では，グラスマン数の積分が現れる．通常の積分とは異なり，グラスマン数の積分は次式で定義される [27]．

$$\int d\eta = \int d\eta^\dagger = 0\,, \tag{7.22a}$$
$$\int d\eta\,\eta = \int d\eta^\dagger\,\eta^\dagger = 1\,. \tag{7.22b}$$

■ コメント ■

グラスマン数の積分がなぜこのように定義されるのか，その理由について解説しておこう．

*10) 物理的には，無限の過去 ($t=-\infty$)，あるいは，無限の未来 ($t=\infty$) における物理量は，有限時刻 t での物理に影響を与えることはないはずなので，$t=\pm\infty$ での物理量は無視してかまわないということだ．

- 積分 (7.22) の定義は，一見すると奇妙にみえるが，通常の積分の満たす式（x 積分に関する並進不変性）

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x+a)\,, \ (a \text{ は任意の定数}) \qquad (7.23)$$

と同様な式，すなわち，**グラスマン積分に関する並進不変性**

$$\int d\eta\, f(\eta) = \int d\eta\, f(\eta+\varepsilon)\,, \qquad (7.24)$$

を満たすべしという要請からきていると考えてもよい．ここで，ε は任意のグラスマン定数である．$f(\eta)$ を η で展開した式 $f(\eta) = f_0 + \eta\, f_1$ （$\eta^2 = 0$ に注意）を上式に代入すると

$$(7.24) \quad \Longrightarrow \quad \int d\eta\ \varepsilon f_1 = 0 \quad \xrightarrow{\varepsilon, f_1 \text{ は}\eta\text{に無関係}} \quad \int d\eta = 0\,,$$

が導かれる．$\int d\eta\, f(\eta)$ が恒等的にゼロでないとすると $\int d\eta\, \eta$ がゼロでない定数でなければならない．通常，(7.22b) 式の右辺を 1 にとるのが慣例である*11)．

- (7.22a) 式の別の理解は，通常の積分で*12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{\partial}{\partial t} f(t) = f(+\infty) - f(-\infty) \overset{f(\pm\infty)=0}{=} 0\,,$$

の関係に対応して

$$\int d\eta\, \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta) = 0\,,$$

を要請することである．この要請は，$f(\eta) = f_0 + \eta\, f_1$ と展開すると (7.22a) 式を導くことがわかる．

- さらに別の理解の仕方は，$\int d\eta$ がグラスマン数だという事実からくる．$\int d\eta$ はグラスマン数なので (7.22a) 式の右辺がゼロでない値をもってしまうと，それはグラスマン数的な定数でなければならないが，そのような自然なグラスマン数は存在していない．一方，$\int d\eta\, \eta$ はグラスマン偶の量なので，通常の数，すなわち，1 とおくことができる．

- $\eta, \eta^\dagger$ はグラスマン数なので大きさをもたない（$\eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0$）ので，定義域という概念がグラスマン数にはない．したがって，$\int d\eta$ および $\int d\eta^\dagger$ の積分範囲は明示されない．

---

*11） 右辺を i にとる定義も可能である [5]．どちらが良いかは好みの問題だが，$\int d\eta\, \eta$ のエルミート共役には気を付けなければならない．(7.22b) 式の定義を採用するときは，$\int d\eta\, \eta$ のエルミート共役を $(\int d\eta\, \eta)^\dagger = +\int d\eta^\dagger\, \eta^\dagger$ で定義する．一方，(7.22b) 式の右辺を i とする定義を採用するときは，(どちらかというとより自然な) $(\int d\eta\, \eta)^\dagger = \int \eta^\dagger d\eta^\dagger = -\int d\eta^\dagger\, \eta^\dagger$ とする．両者の定義の違いは，$d\eta$ の定義の中に i を含めるかどうかの違いで，本質的な違いはない．

*12） $f(t)$ が 2 乗可積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |f(t)|^2 < \infty$ とするならば，$f(\pm\infty) = 0$ でなければならない．

- (7.22) 式から（非常に面白いことに），**グラスマン数の積分は微分と同じ働きをする**ことがわかる．すなわち，η の任意関数 $f(\eta)$ に対して

$$\int d\eta\, f(\eta) = \frac{\partial}{\partial\eta} f(\eta)\,. \tag{7.25}$$

これらの等式は $f(\eta) = f_0 + \eta f_1$ と展開して，上式の両辺に代入すれば容易に確かめられる．

■

演習問題 7.2　この問題は少し難易度が高いが，挑戦する価値のある内容を含む．ひるまずトライしよう．

$\eta_\alpha, \eta_\alpha^\dagger$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ をそれぞれ n 種類のグラスマン数としたとき，次の公式を証明せよ．

$$\int [d\eta d\eta^\dagger]\, \exp\Bigl\{ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \eta_\alpha^\dagger M_{\alpha\beta}\, \eta_\beta \Bigr\} = \det M\,, \tag{7.26}$$

ただし，$M_{\alpha\beta}$ は $n\times n$ の任意の行列で，$[d\eta d\eta^\dagger]$ および $\det M$ は次式で定義される．

$$\int [d\eta d\eta^\dagger] \equiv \int d\eta_n d\eta_{n-1}\cdots d\eta_1\, d\eta_1^\dagger d\eta_2^\dagger \cdots d\eta_n^\dagger\,.$$

$$\det M \equiv \sum_{\beta_1\cdots\beta_n=1}^{n} \varepsilon^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} M_{1\beta_1} M_{2\beta_2}\cdots M_{n\beta_n}\,.$$

ここで $\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ は n 階完全反対称テンソルである．

$$\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = \begin{cases} +1 & (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = (12\cdots n)\ \text{の偶置換}, \\ -1 & (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = (12\cdots n)\ \text{の奇置換}, \\ \ \ 0 & \text{それ以外}. \end{cases}$$

ヒント: まず，$n = 1, 2, 3$ の場合で (7.26) 式を具体的に確かめてみよ．一般の n に対しては，次の関係式を証明せよ．

$$\eta_{\beta_1}\eta_{\beta_2}\cdots\eta_{\beta_n} = \varepsilon^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\eta_1\eta_2\cdots\eta_n\,,$$

$$\eta_{\alpha_1}^\dagger\eta_{\alpha_2}^\dagger\cdots\eta_{\alpha_n}^\dagger = (-1)^{n(n-1)/2}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\eta_n^\dagger\eta_{n-1}^\dagger\cdots\eta_1^\dagger\,,$$

$$\sum_{\beta_1\cdots\beta_n=1}^{n} \varepsilon^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} M_{\alpha_1\beta_1}M_{\alpha_2\beta_2}\cdots M_{\alpha_n\beta_n} = \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\sum_{\beta_1\cdots\beta_n=1}^{n}\varepsilon^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}M_{1\beta_1}M_{2\beta_2}\cdots M_{n\beta_n}\,,$$

$$\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_n=1}^{n} (\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n})^2 = n!\,.$$

ここで，第 3 番目の公式を導くためには，左辺が $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に関して n 階の完

全反対称であることを確かめよ．

■ コメント ■

グラスマン数の積分公式 (7.26) を，通常のガウス積分の公式と比較すると面白い．($M_{\alpha\beta}$ は $n\times n$ エルミート行列で固有値は正としておく．)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\cdots dz_n dz_1^*\cdots dz_n^* \exp\Bigl\{-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} z_\alpha^* M_{\alpha\beta} z_\beta\Bigr\} \propto \frac{1}{\det M}. \tag{7.27}$$

■

(7.26) 式と (7.27) 式の積分公式は，7.13 節で重要な役割を果たす．通常の数のガウス積分では行列式 $\det M$ が分母に，グラスマン数の場合のガウス積分では $\det M$ が分子に現れ，分母分子が逆である点が重要である．

7.4 運動方程式と物理的自由度

再び作用積分 (7.4) に戻って，運動方程式と物理的自由度について議論することにしよう．

7.4.1 オイラー–ラグランジュ方程式

(7.4) 式から定義されるラグランジアンから，オイラー–ラグランジュ方程式をもちいて，運動方程式を導いておこう．

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \ddot q - W''(q)\,F - W'''(q)\,\eta^\dagger\eta, \tag{7.28a}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot\eta^\dagger} L\right) - \frac{\partial}{\partial \eta^\dagger} L = -i\dot\eta - W''(q)\,\eta, \tag{7.28b}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot\eta} L\right) - \frac{\partial}{\partial \eta} L = -i\dot\eta^\dagger + W''(q)\,\eta^\dagger, \tag{7.28c}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot F}\right) - \frac{\partial L}{\partial F} = -F - W'(q)\,. \tag{7.28d}$$

上の導出で，フェルミ的変数*13) の微分には気を付けなければならない．たとえば，微分 $\frac{\partial}{\partial\eta}$, $\frac{\partial}{\partial\dot\eta}$ もフェルミ的変数なので，

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^\dagger\eta) = -\eta^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right) = -\eta^\dagger,$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot\eta}(\eta^\dagger\dot\eta) = -\eta^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial\dot\eta}\dot\eta\right) = -\eta^\dagger,$$

*13) 量子化していない段階では，グラスマン数とフェルミ的変数は同じ性質を満たすので区別する必要はない．以下では，特に断らないかぎり，物理用語としての「フェルミ的変数」を使うことにする．また，グラスマン偶の変数に対しては，ボース的変数という用語をもちいる．

となり，$\frac{\partial}{\partial\eta}$, $\frac{\partial}{\partial\dot{\eta}}$ が $\eta^\dagger$ を飛び越えるときに反可換性からくるマイナス符号を生じることに注意しよう．(7.28) 式では間違えることのないように，$\frac{\partial L}{\partial\eta}$ や $\partial L/\partial\eta$ などとは書かずに $\frac{\partial}{\partial\eta}L$ とフェルミ的変数の順序が明確な表記を心掛けた．

演習問題 7.3　作用原理 $\delta S = 0$ から運動方程式を求め，オイラー–ラグランジュ方程式 (7.28) と一致することを確かめよ．(作用原理はフェルミ的変数を含んでいても，同じように成り立つ.)

7.4.2　質量殻上の作用積分と運動方程式

作用積分に現れている自由度 $q, \eta, \eta^\dagger, F$ は，それぞれ特徴的な運動項（時間微分項）を持っている．$\dot{q}$ に関しては（質量 m が $m=1$ とおかれていること以外は）通常の運動項 $\frac{1}{2}\dot{q}^2$ が現れているが，F の時間微分 $\dot{F}$ は作用積分に含まれていない．そのため，F に対する "運動方程式" にも $\dot{F}$ や $\ddot{F}$ が現れない．したがって，F は物理的自由度とみなすことはできない[*14]．このような自由度 F は**補助場 (auxiliary filed)** と呼ばれる．実際，F の "運動方程式"(7.28d)，すなわち，$F = -W'(q)$ を使って，作用積分から補助場 F を消去できる．

$$\bar{S}[q,\eta,\eta^\dagger] = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \bar{L}(q,\eta,\eta^\dagger) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L(q,\eta,\eta^\dagger,F)\Big|_{F=-W'(q)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\eta^\dagger\eta\right\}. \quad (7.29)$$

この作用積分は運動方程式をもちいたので，**質量殻上の (on-shell)** 作用積分と呼ばれる．この作用積分から導かれる運動方程式は，(7.28a) 式–(7.28c) 式で $F = -W'(q)$ を代入したものとなる．すなわち，質量殻上の運動方程式は次式で与えられる．

$$0 = \ddot{q} + W'(q)W''(q) - W'''(q)\,\eta^\dagger\eta\,, \quad (7.30a)$$
$$0 = -i\dot{\eta} - W''(q)\,\eta\,, \quad (7.30b)$$
$$0 = -i\dot{\eta}^\dagger + W''(q)\,\eta^\dagger. \quad (7.30c)$$

なぜ物理的自由度ではない補助場 F を導入したのかは，次節の超対称性変換，あるいは，次章の超場形式の理論で明らかになる．特に超場形式では補助場 F が必然的に導入されることをみるだろう．

η に関しては，時間の 1 階微分しか作用積分にも運動方程式にも含まれていない．これはフェルミ的自由度の特徴だ．電子などスピン $\hbar/2$ をもつフェルミ粒子はディラック方程式にしたがうことが知られているが，この方程式は時間

---

*14)　運動方程式は力学変数の時間発展を与えるものなので，時間微分が含まれていなければ，その変数は物理的自由度とはみなされない．実際，F は (7.28d) 式から $F = -W'(q)$ と q の関数として与えられるので，F は独立変数ではない．

と空間座標に関して 1 階微分方程式になっている．$\eta^\dagger$ の時間微分 $\dot{\eta}^\dagger$ は（運動方程式には含まれているが），作用積分には含まれていない．$\dot{\eta}^\dagger$ を含めるために運動項 $i\eta^\dagger\dot{\eta}$ を対称化して，$\frac{i}{2}(\eta^\dagger\dot{\eta} - \dot{\eta}^\dagger\eta)$ とすることもできるが，作用積分の中で時間に関する部分積分（$-\frac{i}{2}\dot{\eta}^\dagger\eta = \frac{d}{dt}\left[-\frac{i}{2}\eta^\dagger\eta\right] + \frac{i}{2}\eta^\dagger\dot{\eta}$ で表面項は落とす）を行うことで本質的に $i\eta^\dagger\dot{\eta}$ に戻ることがわかる．このように，作用積分に時間の 1 階微分しか現れないことからも，$\eta, \eta^\dagger$ がボース的変数ではないことが理解できる．

7.5 超対称性変換

7.5.1 無限小超対称性変換

ラグランジアン形式において，超対称性は次の無限小超対称性変換のもとでの不変性として実現される*15)．

超対称性変換

$$\delta q = \varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta\,, \tag{7.31a}$$

$$\delta\eta = \varepsilon(i\dot{q} + F)\,, \tag{7.31b}$$

$$\delta\eta^\dagger = \varepsilon^\dagger(-i\dot{q} + F)\,, \tag{7.31c}$$

$$\delta F = -i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger - i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}\,. \tag{7.31d}$$

ここで，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ は（無限小）グラスマン数である．超対称性を初めて学ぶ読者にとって，(7.31) 式の変換はあまり馴染みのないものに違いない．そのため，何も言わなければ「まあ，そんなものか」とあっさり素通りしてしまうことだろう．しかし，超対称性変換 (7.31) の中には，超対称性の持つ本質が凝縮された形で隠れている．ここで立ち止まって，この変換をじっくりと吟味する必要があるだろう．

第 4 章のハミルトニアン形式では，超対称性の本質は，最小超対称性関係 (4.9)，あるいは，超対称性代数 (4.18), (4.20) に凝縮して込められており，ハミルトニアンや超電荷の具体的な形を知る必要はなかったことを思い出そう．ラグランジアン形式では，それらの代わりに**超対称性変換 (7.31) の中に超対称性の重要な情報が埋め込まれている**．それをこれから詳しくみていこう．変換 (7.31) を一目見て超対称性の本質を読み取れたなら，あなたは初心者から抜け出したことになる．

---

*15) (7.31) 式の変換のもとで作用積分が不変であることは，7.6 節で確かめる．

7.5.2 超対称性変換の整合性

まず初めに，超対称性変換 (7.31) がそれほど突飛な形をしているわけではないことを，i) グラスマン偶奇性，ii) 次元解析，および，iii) エルミート性の観点からみておこう．ここでの解析は，初学者にとって多少高度な内容を含む．ある程度物理の訓練を受けた学生でも，これから行う考察を自然とできる人は少ない．しかし，研究者にとっては，ごく当たり前のステップにすぎない．以下での目的は，超対称性変換 (7.31) がどれくらいもっともらしいものなのか，これ以外の変換の形はありうるのか，などをチェックすることである．

i) グラスマン偶奇性

超対称性が他の対称性と一線を画す点は，**ボース的変数とフェルミ的変数の入れ替えの対称性**というところにある．したがって，(無限小) 変換パラメータ $\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ はフェルミ的変数（グラスマン数）にとる．一方，$\delta q, \delta\eta, \delta\eta^\dagger, \delta F$ は元の変数 $q, \eta, \eta^\dagger, F$ と同じボース的，あるいは，フェルミ的性質を持たねばならないので，($\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ がフェルミ的変数であることを考慮に入れると) ボース的変数 $\delta q, \delta F$ には $\eta, \eta^\dagger$ が，フェルミ的変数 $\delta\eta, \delta\eta^\dagger$ には q, F が現れるのはいわば必然ということになる．

ii) 次元解析

変換 (7.31) において，δF になぜ，$\eta, \eta^\dagger$ ではなく $\dot{\eta}, \dot{\eta}^\dagger$ が現れているのか，$\delta\eta, \delta\eta^\dagger$ の右辺になぜ q ではなく $\dot{q}$ が現れているのか，その理由は時間に関する次元を考慮すると理解できる．作用積分 (7.4) から，次の 3 つの量の（時間に関する）次元は等しくなければならない．

$$[\,\dot{q}^2\,] = [\,F^2\,] = [\,\eta^\dagger \dot{\eta}\,]. \tag{7.32}$$

ここで，記号 $[\cdots]$ は時間に関する次元をカウントするもので，次元が等しければ等式で結ばれる．たとえば，時間微分は $[d/dt] = [t^{-1}]$ となる．(7.32) 式の関係から $[t^{-2}q^2] = [F^2] = [t^{-1}\eta^\dagger\eta]$ なので，$[\,q\,] = [\,tF\,] = [\,t^{1/2}\eta\,] = [\,t^{1/2}\eta^\dagger\,]$ であることがわかる．これらの関係と $[\,q\,] = [\,\delta q\,]$ および (7.31a) 式から，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ の時間に関する次元は $[\,\varepsilon\,] = [\,\varepsilon^\dagger\,] = [\,t^{1/2}\,]$ と決まる．$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ の次元がわかったので，後は (7.31) 式の左辺と右辺の次元が合っていることを確かめればよい．つまり，両辺の次元が合うためには，$\delta\eta, \delta\eta^\dagger$ の右辺に q ではなく $\dot{q}$ が，δF の右辺に $\eta, \eta^\dagger$ ではなく $\dot{\eta}, \dot{\eta}^\dagger$ が現れる必要があったのである*16)．

iii) エルミート性

q と F はエルミート（実）なので，$\delta q, \delta F$ もエルミートでなければならない．このことから，$\delta q, \delta F$ の右辺第 1 項が決まれば，第 2 項はエルミート性から自動的に決まる．また，η と $\eta^\dagger$ は互いにエルミート共役なので，

*16) ここでは，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ 以外に次元をもったパラメータは現れないと仮定している．

$\delta\eta, \delta\eta^\dagger$ も互いにエルミート共役でなければならない．したがって，$\delta\eta$ が与えられれば自動的に $\delta\eta^\dagger$ が決まることになる．

以上の考察から，超対称性変換 (7.31) の形が（完全に決まるわけではないが），それほど勝手に与えられているわけではないことがわかったであろう．ここまでの考察は，ほとんどそのまま超対称場の量子論における超対称性変換にも適用できる．実際，付録 A の (A.3) 式に与えられている超対称性変換は，(7.31) 式と類似の構造をしているのが見てとれるだろう．

演習問題 7.4　q と F はエルミート（実）であり，$\eta, \eta^\dagger$ は互いにエルミート共役の関係にあるので，それらの超対称性変換 (7.31) も同じ性質を持っていなければならない．そのことを確かめよ．そのとき，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger, \eta, \eta^\dagger$ は互いに反可換なフェルミ的変数であることに注意せよ．

7.5.3　超対称性代数

上の考察だけでは，超対称性の本質を暴いたことにはならない．まだまだ，理解は不十分だ．ハミルトニアン形式で導いた超対称性代数 (4.20) に相当するものを，超対称性変換 (7.31) から引っ張り出す必要がある．それを以下で示そう．そのために，超対称性変換 (7.31) を $\delta\mathcal{O} \equiv \varepsilon\, \delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\mathcal{O} - \varepsilon^\dagger\, \delta_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}$ $(\mathcal{O} = q, \eta, \eta^\dagger, F)$ とおいて，変換パラメータ $\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ を取り除いた変換 $\delta_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}, \delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\mathcal{O}$ を次のように定義しておく．

$$\begin{cases} \delta_{\mathcal{Q}} q = \eta\,, \\ \delta_{\mathcal{Q}} \eta = 0\,, \\ \delta_{\mathcal{Q}} \eta^\dagger = i\dot{q} - F\,, \\ \delta_{\mathcal{Q}} F = i\dot{\eta}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_{\mathcal{Q}^\dagger} q = \eta^\dagger\,, \\ \delta_{\mathcal{Q}^\dagger} \eta = i\dot{q} + F\,, \\ \delta_{\mathcal{Q}^\dagger} \eta^\dagger = 0\,, \\ \delta_{\mathcal{Q}^\dagger} F = -i\dot{\eta}^\dagger\,. \end{cases} \tag{7.33}$$

このとき，次の関係式が成り立つ．

超対称性変換による超対称性代数の実現

$$\left\{ \delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\,,\, \delta_{\mathcal{Q}} \right\} \mathcal{O} = 2i\, \frac{d}{dt}\mathcal{O}\,, \tag{7.34a}$$

$$(\delta_{\mathcal{Q}})^2\, \mathcal{O} = (\delta_{\mathcal{Q}^\dagger})^2\, \mathcal{O} = 0\,. \tag{7.34b}$$

ここで，$\mathcal{O} = q, \eta, \eta^\dagger, F$ である．対応規則で $H \leftrightarrow i\hbar\frac{d}{dt}$ と読み替え，$\sqrt{\hbar}\delta_{\mathcal{Q}} \leftrightarrow \mathcal{Q}, \sqrt{\hbar}\delta_{\mathcal{Q}^\dagger} \leftrightarrow \mathcal{Q}^\dagger$ とすると，超対称性代数の $\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = 2H$ は，上式の第 1 式 (7.34a) に対応していることがわかる．また，超対称性代数の $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ と第 2 式 (7.34b) の対応は明らかであろう．超対称性変換 (7.31) からこれらの関係までが見えていたなら，あなたの理解は一歩進んでいると胸を張ってよい．

≪ (7.34) 式の証明 ≫

証明はそれほど難しくない．ここでは $\mathcal{O}$ として，q に関する式のみを確かめることにする．他の変数に対する証明は全く同様に行えばよい．

$$\begin{aligned}\{\delta_{Q^\dagger},\delta_Q\}q &= \delta_{Q^\dagger}(\delta_Q q)+\delta_Q(\delta_{Q^\dagger}q) \overset{(7.33)}{=} \delta_{Q^\dagger}(\eta)+\delta_Q(\eta^\dagger)\\ &\overset{(7.33)}{=} (i\dot{q}+F)+(i\dot{q}-F)=2i\,\dot{q}\,,\end{aligned}$$

$$(\delta_Q)^2 q=\delta_Q(\delta_Q q)\overset{(7.33)}{=}\delta_Q(\eta)\overset{(7.33)}{=}0\,,$$

$$(\delta_{Q^\dagger})^2 q=\delta_{Q^\dagger}(\delta_{Q^\dagger}q)\overset{(7.33)}{=}\delta_{Q^\dagger}(\eta^\dagger)\overset{(7.33)}{=}0\,.$$

Q.E.D.

先に定義した超対称性変換 (7.31) は物理的自由度ではない補助場 F を含んでいた．後で超電荷の導出を行う際に便利なように，補助場 F を消去した質量殻上の超対称性変換も与えておこう．

質量殻上の超対称性変換

$$\bar{\delta}q \equiv \delta q\big|_{F=-W'(q)} = \varepsilon\eta^\dagger-\varepsilon^\dagger\eta\,, \tag{7.35a}$$

$$\bar{\delta}\eta \equiv \delta\eta\big|_{F=-W'(q)} = \varepsilon(i\dot{q}-W'(q))\,, \tag{7.35b}$$

$$\bar{\delta}\eta^\dagger \equiv \delta\eta^\dagger\big|_{F=-W'(q)} = \varepsilon^\dagger(-i\dot{q}-W'(q))\,. \tag{7.35c}$$

前と同様に，$\bar{\delta}\mathcal{O}\equiv\varepsilon\,\bar{\delta}_{Q^\dagger}\mathcal{O}-\varepsilon^\dagger\,\bar{\delta}_Q\mathcal{O}$ $(\mathcal{O}=q,\eta,\eta^\dagger,F)$ として

$$\begin{cases}\bar{\delta}_Q q=\eta\,,\\ \bar{\delta}_Q\eta=0\,,\\ \bar{\delta}_Q\eta^\dagger=i\dot{q}+W'(q)\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{\delta}_{Q^\dagger}q=\eta^\dagger\,,\\ \bar{\delta}_{Q^\dagger}\eta=i\dot{q}-W'(q)\,,\\ \bar{\delta}_{Q^\dagger}\eta^\dagger=0\,.\end{cases} \tag{7.36}$$

を定義すると，$\delta_Q,\delta_{Q^\dagger}$ と同じように

$$\left\{\bar{\delta}_{Q^\dagger}\,,\,\bar{\delta}_Q\right\}\mathcal{O}=2i\,\dot{\mathcal{O}}+(\text{運動方程式を使うと消える項})\,, \tag{7.37a}$$

$$(\bar{\delta}_Q)^2\,\mathcal{O}=0+(\text{運動方程式を使うと消える項})\,, \tag{7.37b}$$

$$(\bar{\delta}_{Q^\dagger})^2\,\mathcal{O}=0+(\text{運動方程式を使うと消える項})\,, \tag{7.37c}$$

を満たすことがわかる．ただし，質量殻上の変換は，補助場 F を運動方程式を使って消去しているので，(7.34) 式と一致するためには一般に運動方程式をもちいる必要がある．このとき「質量殻上で成り立つ」という言い方をする．(7.37) の証明は読者の演習問題として残しておくことにする．

演習問題 7.5　次式をもちいて (7.37) 式を確かめよ．

$$\bar{\delta}_Q W'(q)=W''(q)\,\bar{\delta}_Q q=W''(q)\,\eta\,,$$

$$\bar{\delta}_{Q^\dagger}W'(q)=W''(q)\,\bar{\delta}_{Q^\dagger}q=W''(q)\,\eta^\dagger\,.$$

■コメント■

ここまでくると補助場 F の有用性がみえてくる．一つ目は，補助場を消去した質量殻上では，(7.34) 式の関係は運動方程式を使わないとみえてこないことである．二つ目は，質量殻上の超対称性変換 (7.35) には $W'(q)$ が現れており，これはラグランジアン（あるいは作用積分）の情報が必要であることを意味している．一方，補助場 F を含んだ超対称性変換 (7.31) には $W'(q)$ は現れておらず，ラグランジアンの情報を必要としない．また，$W'(q)$ は q の任意関数でかまわないので，質量殻上の超対称性変換 (7.35) は一般に非線形変換だが，F を含んだ超対称性変換 (7.31) は変数 $q, \eta, \eta^\dagger, F$ の線形変換で与えられている．

7.6 ネーターの定理と超電荷

前章で，無限小変換のもとでの不変性は，ネーターの定理により保存量を導くことをみた．この節では，超対称性変換 (7.31) のもとで作用積分が不変であることを示し，その不変性から得られる保存量が超電荷であることを確かめる．

7.6.1 ラグランジアンの変換性

前章で議論したように，作用積分の不変性は必ずしもラグランジアンの不変性を意味しない．実際，無限小超対称性変換 (7.31) のもとで，(7.4) 式で定義されるラグランジアンは，全時間微分の形となる．

$$\delta L(q,\eta,\eta^\dagger,F) = \frac{d}{dt}\left[\varepsilon\big((\dot{q} - iF - iW'(q))\,\eta^\dagger\big) + \varepsilon^\dagger(-iW'(q)\,\eta)\right]. \tag{7.38}$$

≪ (7.38) 式の証明 ≫

(7.38) 式の導出は，フェルミ的変数の取り扱いに慣れるためのよい演習問題だ．この計算では多くの項が現れるが，落ち着いて見渡せば，どの項とどの項が組み合わさって相殺，あるいは，簡単な形にまとまるかを見極めるのはそれほど難しくはないはずだ．下には計算例を与えておいたが，読者はここでの導出を参考にして，演習問題 7.6 を自力で解いてほしい．

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta\Big[\frac{1}{2}\,\dot{q}^2 + i\eta^\dagger\dot{\eta} + \frac{1}{2}\,F^2 + W'(q)F + W''(q)\eta^\dagger\eta\Big] \\
&= \delta\dot{q}\,\dot{q} + i(\delta\eta^\dagger\,\dot{\eta} + \eta^\dagger\,\delta\dot{\eta}) + \delta F\,F + \delta q\,W''(q)F + W'(q)\,\delta F \\
&\quad + \delta q\,W'''(q)\eta^\dagger\eta + W''(q)(\delta\eta^\dagger\,\eta + \eta^\dagger\,\delta\eta) \\
&= (\underbrace{\varepsilon\dot{\eta}^\dagger}_{(a)} - \underbrace{\varepsilon^\dagger\dot{\eta}}_{(b)})\dot{q} + i(\varepsilon^\dagger(\underbrace{-i\dot{q}}_{(b')} + \underbrace{F}_{(c)})\dot{\eta} + \eta^\dagger\varepsilon(\underbrace{i\ddot{q}}_{(a')} + \underbrace{\dot{F}}_{(d)})) \\
&\quad + (\underbrace{-i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger}_{(d')} - \underbrace{i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}}_{(c')})\,F + (\underbrace{\varepsilon\eta^\dagger}_{(e)} - \underbrace{\varepsilon^\dagger\eta}_{(f)})\,W''(q)\,F + W'(q)\,(\underbrace{-i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger}_{(g)} - \underbrace{i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}}_{(h)}) \\
&\quad + \underbrace{(\varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta)}_{(i)}\,W'''(q)\eta^\dagger\eta
\end{aligned}$$

$$+W''(q)\big(\varepsilon^\dagger(\underbrace{-i\dot{q}}_{(h')}+\underbrace{F}_{(f')})\eta+\eta^\dagger\varepsilon(\underbrace{i\dot{q}}_{(g')}+\underbrace{F}_{(e')})\big).$$

q, F はボース的変数，$\eta, \eta^\dagger, \varepsilon, \varepsilon^\dagger$ はフェルミ的変数であることを考慮して，以下の変形を行う．

$$\begin{aligned}
(a)+(a') &= \varepsilon\dot{\eta}^\dagger\dot{q}-\eta^\dagger\varepsilon\ddot{q}=\varepsilon(\dot{\eta}^\dagger\dot{q}+\eta^\dagger\ddot{q})=\frac{d}{dt}\Big[\varepsilon\eta^\dagger\dot{q}\Big],\\
(b)+(b') &= -\varepsilon^\dagger\dot{\eta}\dot{q}+\varepsilon^\dagger\dot{q}\dot{\eta}=0,\\
(c)+(c') &= i\varepsilon^\dagger F\dot{\eta}-i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}F=0,\\
(d)+(d') &= i\eta^\dagger\varepsilon\dot{F}-i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger F=\frac{d}{dt}\Big[\varepsilon(-i\eta^\dagger F)\Big],\\
(e)+(e') &= \varepsilon\eta^\dagger W''(q)F+W''(q)\eta^\dagger\varepsilon F=0,\\
(f)+(f') &= -\varepsilon^\dagger\eta W''(q)F+W''(q)\varepsilon^\dagger F\eta=0,\\
(g)+(g') &= -iW'(q)\varepsilon\dot{\eta}^\dagger+iW''(q)\eta^\dagger\varepsilon\dot{q}\\
&= \frac{d}{dt}\Big[\varepsilon\big(-i\eta^\dagger W'(q)\big)\Big], \qquad \left(\because \frac{d}{dt}W'(q)=W''(q)\dot{q}\right)\\
(h)+(h') &= -iW'(q)\varepsilon^\dagger\dot{\eta}-iW''(q)\varepsilon^\dagger\dot{q}\eta\\
&= \frac{d}{dt}\Big[\varepsilon^\dagger\big(-i\eta W'(q)\big)\Big], \qquad \left(\because \frac{d}{dt}W'(q)=W''(q)\dot{q}\right)\\
(i) &= \varepsilon\eta^\dagger W'''(q)\eta^\dagger\eta-\varepsilon^\dagger\eta W'''(q)\eta^\dagger\eta\\
&= \varepsilon(\eta^\dagger)^2\eta W'''(q)+\varepsilon^\dagger(\eta)^2\eta^\dagger W'''(q)\\
&= 0 \qquad (\because \text{グラスマン数のベキ零性：}(\eta)^2=(\eta^\dagger)^2=0).
\end{aligned}$$

以上をまとめると，(7.38) 式が得られる． **Q.E.D.**

この証明では，フェルミ的変数の反可換性が重要な役割を果たしていることに注意しておく．一方，質量殻上の超対称性変換 (7.35) のもとで，(7.29) 式で与えられるラグランジアン $\bar{L}$ も次式のように時間の全微分の形となる．

$$\delta\bar{L}(q,\eta,\eta^\dagger)=\frac{d}{dt}\Big[\varepsilon\big(\dot{q}\eta^\dagger\big)+\varepsilon^\dagger\big(-iW'(q)\,\eta\big)\Big]. \tag{7.39}$$

この右辺の結果は，(7.38) 式で F を運動方程式 $F=-W'(q)$ を使って消去しても得られるが，(超対称性をきちんと理解したいと願う）読者はサボらず直接上式を導くべきだ．

演習問題 7.6　(7.39) 式を導け．

7.6.2　ネーター電荷としての超電荷

無限小超対称性変換のもとで，ラグランジアンが全時間微分の形になることを確かめたので，ネーターの定理から保存量を導くことができる．第 6 章でのネーターの定理はボース的変数のみが含まれる場合のものであったが，フェルミ的変数を含む場合でも同様に定理は成り立つ．ただし，フェルミ的変数の反可換性の性質のため，変数の順番に気を付けなければならない．下にフェルミ的変数を含んだより一般的なネーターの定理を与えておく．

拡張されたネーターの定理（フェルミ的変数を含む場合）

ラグランジアンが $z_\alpha, \dot{z}_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ の関数 $L = L(z; \dot{z})$ で与えられているとする．z_α はボース的でもフェルミ的変数のどちらでもかまわない[*a)]．このとき，ラグランジアンが次の無限小変換

$$z_\alpha \;\to\; z'_\alpha = z_\alpha + \delta z_\alpha\,, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)\,, \tag{7.40}$$

のもとで時間の全微分の形で与えられたとする．すなわち，

$$\delta L \equiv L(z + \delta z; \dot{z} + \delta \dot{z}) - L(z; \dot{z}) = \frac{d}{dt} K(z; \dot{z})\,. \tag{7.41}$$

ここで，無限小変換 δz_α は，複数の無限小パラメータ ε_A $(A = 1, 2, \cdots, N)$ を含んでいてもよいし，ε_A はボース的でもフェルミ的変数のどちらでもよい．そのとき，次式で定義されるネーター電荷 $\mathcal{Q}_A$ $(A = 1, 2, \cdots, N)$ が保存する．

$$\sum_{A=1}^{N} \varepsilon_A\, \mathcal{Q}_A \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} \delta z_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{z}_\alpha} L - K\,, \qquad \frac{d\mathcal{Q}_A}{dt} = 0\,. \tag{7.42}$$

*a) ここでは，量子化前の古典的レベルでの議論なので，フェルミ的変数とはグラスマン数を意味する．

演習問題 7.7 (7.19) 式をもちいて，拡張されたネーターの定理を証明せよ．((7.19) 式の前後に書かれていることに注意を払うこと．それ以外は第 6 章でのネーターの定理の証明と本質的に同じである.)

■ コメント ■

- 一見すると前章で導いたネーター電荷と同じにみえるが，ここで注意すべき点は δz_α の位置である．z_α がフェルミ的変数のときは，δz_α の位置は，ネーター電荷の定義式 (7.42) の右辺で与えられているように一番左である．それ以外では一般に保存するネーター電荷にならない．
- (7.42) 式の意味することは，右辺を ε_A で展開したときに，ε_A の展開係数として $\mathcal{Q}_A$ を定義するということである．
- $\mathcal{Q}_A$ $(A = 1, 2, \cdots, N)$ はすべて保存するので，それらの線形結合を取り直したものも同じく保存する．場合によっては，適当な（複素）係数をかけたものを新たに保存量 $\mathcal{Q}_A$ と定義し直したほうが便利なこともある．
- z_α は我々の考察している模型では，$q, \eta, \eta^\dagger, F$ に対応する．もし，質量殻上のラグランジアン $\bar{L}$ を考えるならば，$q, \eta, \eta^\dagger$ が z_α に対応する．

■

ここまでくれば，次の超電荷が保存することを示すのは容易い*17)．

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\big(\dot{q} - iW'(q)\big)\,\eta\,, \tag{7.43a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\big(\dot{q} + iW'(q)\big)\,\eta^\dagger\,. \tag{7.43b}$$

演習問題 7.8　次の 2 つの方法で超電荷 (7.43) が保存することを確かめよ*18)．

(1)　ネーターの定理から，保存するネーター電荷 (7.42) が超電荷 (7.43) と一致することを確かめよ*19)．ただし，$\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}^\dagger$ がお互いエルミート共役になるように，(7.42) 式の左辺を $\sqrt{\hbar}(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})$ と定義した*20)．

(2)　超電荷が保存すること，すなわち，$\frac{d}{dt}\mathcal{Q} = \frac{d}{dt}\mathcal{Q}^\dagger = 0$ であることを，運動方程式をもちいて直接確かめよ．

7.7　正準量子化

7.7.1　正準共役運動量

これまでの取り扱いは古典的であった．量子論へ移行するために，まず初めに正準共役運動量を定義する必要がある．q と η の正準共役運動量をそれぞれ p と π_η としておくと，定義より次式で与えられる．

$$p \equiv \frac{\partial}{\partial\dot{q}}\,\bar{L} = \dot{q}\,, \tag{7.44a}$$

$$\pi_\eta \equiv \frac{\partial}{\partial\dot{\eta}}\,\bar{L} = -i\eta^\dagger\,. \tag{7.44b}$$

■ コメント ■

- ここでは，補助場 F を消去した質量殻上のラグランジアン $\bar{L}$ をもちいて，q, η の正準共役運動量を定義した．ラグランジアンとして L よりも $\bar{L}$ を使ったほうが便利な理由は，補助場 F の時間微分 $\dot{F}$ がラグランジアンに現れないので F の正準共役運動量が存在しないのと，正準量子化は物理的自由度のみで行ったほうが簡単だからである．
- $\bar{L}$ は（L も）$\dot{\eta}^\dagger$ を含んでいないので，$\eta^\dagger$ の正準共役運動量 $\pi_{\eta^\dagger}$ は定義からゼロである．これを避けるためには運動項を対称化して

---

*17)　この超電荷が第 4 章で定義したものと等しいことは，7.10 節で証明する．

*18)　このように，$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ が保存量であることを 1 つの方法だけでなく，他の方法でも確かめることは研究を進めていく上で重要だ．

*19)　(7.31) 式と (7.38) 式を使っても求まるし，質量殻上のラグランジアンの変換則 (7.35) と (7.39) 式を使っても同じ結果が得られる．

*20)　ここで係数 $\sqrt{\hbar}$ は，超電荷が（量子化した後で）超対称性代数 $\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = 2H$ を満たすように決められている．

$i\eta^\dagger\dot\eta \to \frac{i}{2}(\eta^\dagger\dot\eta - \dot\eta^\dagger\eta)$ と定義し直す方法がある．しかしながら，どちらの運動項を使うにしても，厳密に正準量子化を行うためには，拘束系の量子力学の知識が必要とされる．興味のある読者は，オリジナルのディラックによる解説 [15] を読むか，教科書 [20]，あるいは，場の量子論の教科書だが文献 [3] にも詳しく議論されている．ここでは，簡便法と呼ばれる処方箋にしたがって正準量子化を行うことにした．結果は，拘束系の量子力学をもちいて厳密に行ったものと一致するので安心して先に進んでもらいたい．

- π_η の計算はフェルミ的変数の微分なので，下に示したようにフェルミ的変数を飛び越えるときのマイナス符号を忘れないように気を付けなければならない．

$$\frac{\partial}{\partial\dot\eta}\bar{L} = \frac{\partial}{\partial\dot\eta}(i\eta^\dagger\dot\eta) = -i\eta^\dagger\frac{\partial}{\partial\dot\eta}\dot\eta = -i\eta^\dagger\,.$$

■

7.7.2　ラグランジアンからハミルトニアンへ

正準共役運動量が定義されたので，ラグランジアンからハミルトニアンへ移ることができる．

$$\begin{aligned} H &\equiv \dot q p + \dot\eta\pi_\eta - \bar{L} \\ &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 - \frac{1}{2}W''(q)(\eta^\dagger\eta - \eta\eta^\dagger)\,. \end{aligned} \tag{7.45}$$

■ コメント ■

- 上のハミルトニアンの定義を見て何も疑問に思わなかったら，あなたはまだフェルミ的変数の特性を理解できていないことになる．なぜなら，第 1 行目の右辺第 2 項は $\dot\eta\pi_\eta$ とするか，順番を逆にした $\pi_\eta\dot\eta$ とするかで，符号が異なるからである．どちらが正しい順番かは，ルジャンドル変換の意味を考えればわかる．ルジャンドル変換は変数 $\{q,\eta\,;\dot q,\dot\eta\}$ から異なる変数の組 $\{q,\eta\,;p,\pi_\eta\}$ への変換を意図したものであるから，ハミルトニアンから $\dot q,\dot\eta$ の依存性はなくなっていなければならない．そのためには，$\dot\eta$ と π_η の順番は (7.45) 式で定義されるものでなければならない．実際，H からは $\dot\eta$ が消え去っていることが見てとれる．
- 本来，$\eta^\dagger$ は $i\pi_\eta$ と書くべきところだが，ここでは $\eta^\dagger$ のままにしておいた．このほうがハミルトニアンのエルミート性が見易い．
- (7.45) 式 2 行目の等号では，$\eta^\dagger\eta$ を $\frac{1}{2}(\eta^\dagger\eta - \eta\eta^\dagger)$ に置き換えた．この置き換えは（量子化前の）古典レベルでは問題ないが，量子論的には（この後すぐにみるように）両者で定数項の違いを生じる．通常の理論でも，古典論から量子論へ移行する際に，演算子間の**順序問題 (ordering problem)** の不定性が常につきまとう．しかし，超対称量子力学の場合は，η と $\eta^\dagger$ の順番をどうするか

は超対称性の要請から決めることができる．第4章でみたように，超対称量子力学のハミルトニアンは超電荷と $2H = \{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\}$ で結びついている．この関係式をハミルトニアン H の定義とみなすと，7.7.3 節でみるように H は (7.45) 式で与えられるものに一致する．

7.7.3 量子化条件

座標と正準共役運動量の間に次の量子化条件を課すことによって，量子論への移行が完了する．

$$[\,p\,,\,q\,] = -i\hbar, \tag{7.46a}$$

$$\{\,\pi_\eta\,,\,\eta\,\} = -i\hbar \quad\Longleftrightarrow\quad \{\,\eta^\dagger\,,\,\eta\,\} = \hbar. \tag{7.46b}$$

これら以外の交換関係，あるいは，反交換関係はすべてゼロである．

$$[\,q\,,\,q\,] = [\,p\,,\,p\,] = 0\,, \tag{7.47a}$$

$$\{\,\eta\,,\,\eta\,\} = \{\,\eta^\dagger\,,\,\eta^\dagger\,\} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0\,, \tag{7.47b}$$

$$[\,q\,,\,\eta\,] = [\,q\,,\,\eta^\dagger\,] = [\,p\,,\,\eta\,] = [\,p\,,\,\eta^\dagger\,] = 0\,. \tag{7.47c}$$

■ コメント ■

- 量子化条件は，ボース的変数の間には交換関係，フェルミ的変数の間には反交換関係が設定される．また，ボース的変数とフェルミ的変数の間には交換関係が設定され，それらは可換である．
- 量子化条件として，π_η と η の反交換関係 (7.46b) の右辺を $-i\hbar$ とするか $+i\hbar$ とするか迷うところである*21)．どちらが正しい量子化条件を導くかは，π_η の定義 $\pi_\eta = -i\eta^\dagger$ をもちいて，$\eta^\dagger$ と η の間の反交換関係でみるとはっきりする．$\{\eta^\dagger, \eta\}$ を任意の状態で内積をとってみると

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\,\{\,\eta^\dagger\,,\,\eta\,\}\,|\psi\rangle &= \langle\psi|(\eta^\dagger\eta + \eta\eta^\dagger)|\psi\rangle \\
&= \langle\eta\psi|\eta\psi\rangle + \langle\eta^\dagger\psi|\eta^\dagger\psi\rangle \\
&\geq 0\,,
\end{aligned}$$

となるので，$\{\pi_\eta, \eta\} = -i\hbar$ と右辺の符号を決めるのが正しい．なぜなら，もし，右辺を $+i\hbar$ ととると $\{\eta^\dagger, \eta\} = -\hbar$ となり，上の不等式と矛盾するからである．

量子化条件 (7.46) 式と (7.47) 式をもちいることで，複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ が期

---

*21) 本来は悩むべきところのはずだが，経験上，ほとんどの学生は疑問に思うことなく，教科書に書かれていることを丸暗記して満足しているようだ．

待どおり，$N=2$ 超対称性代数を満たすことがわかる．すなわち，

$$\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = 2H, \tag{7.48a}$$

$$\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0. \tag{7.48b}$$

ここで，$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ は (7.43) 式で $\dot{q}$ を p で置き換えたものだ．すなわち，

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\big(p - iW'(q)\big)\,\eta, \tag{7.49a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\big(p + iW'(q)\big)\,\eta^\dagger. \tag{7.49b}$$

上式から $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ は自明であろう．なぜなら，この性質は η と $\eta^\dagger$ のベキ零性 $\eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0$ から直接導かれるからである．自明でない関係式は，(7.48a) 式，すなわち，$\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = 2H$ である．この式の証明は，左辺の反交換関係 $\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\}$ を計算して右辺に一致することを示せばよい．そのとき必要な関係式は，量子化条件 (7.46) 式と (7.47) 式のみだ．反交換関係に慣れていないと，$\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\}$ を $\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger$ に分解して，それぞれを計算してしまいがちだ．その計算方法では正しい結果にたどり着くまでの道のりが極めて不透明だ．$\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\}$ をバラバラに分解することはせずに，**反交換関係，あるいは，交換関係を維持したまま変形すること**が重要だ．下に計算例を示したので，どのように式を変形していくか，また，そのとき必要な公式は何かをよく見て考えながら，計算法を学び取ってほしい．

≪ (7.48) 式の証明 ≫

$$
\begin{aligned}
&\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} \\
&\overset{(7.49)}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\hbar}}(p+iW'(q))\eta^\dagger,\ \frac{1}{\sqrt{\hbar}}(p-iW'(q))\eta \right\} \\
&= \frac{1}{\hbar}\Big((p+iW'(q))\{\eta^\dagger, (p-iW'(q))\eta\} - [p+iW'(q), (p-iW'(q))\eta]\,\eta^\dagger\Big) \\
&\qquad (\because \{AB, C\} = A\{B,C\} - [A,C]B\,) \\
&= \frac{1}{\hbar}(p+iW'(q))\Big([\eta^\dagger, (p-iW'(q))]\,\eta + (p-iW'(q))\,\{\eta^\dagger, \eta\}\Big) \\
&\quad -\frac{1}{\hbar}\Big([p+iW'(q), p-iW'(q)]\,\eta + (p-iW'(q))\,[p+iW'(q), \eta]\Big)\,\eta^\dagger \\
&\qquad (\because \{A, BC\} = [A,B]C + B\{A,C\},\ [A,BC] = [A,B]C + B[A,C]) \\
&= (p+iW'(q))(p-iW'(q)) - \frac{1}{\hbar}[p+iW'(q), p-iW'(q)]\,\eta\eta^\dagger \\
&\qquad (\because \text{量子化条件 (7.46) 式, (7.47) 式}) \\
&= p^2 + (W'(q))^2 - i[p, W'(q)] + \frac{2i}{\hbar}[p, W'(q)]\left(\frac{\hbar}{2} - \frac{1}{2}[\eta^\dagger, \eta]\right) \\
&\qquad \left(\because \eta\eta^\dagger = \frac{1}{2}\{\eta^\dagger, \eta\} - \frac{1}{2}[\eta^\dagger, \eta] = \frac{\hbar}{2} - \frac{1}{2}[\eta^\dagger, \eta]\right) \\
&= p^2 + (W'(q))^2 - W''(q)\,[\eta^\dagger, \eta] \\
&\qquad \left(\because [p, W'(q)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, W'(q)\right] = -i\hbar W''(q)\right) \\
&= 2H. \qquad (\because \text{(7.45) 式})
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

■ コメント ■

注意点としてすでに述べたが，上の変形で重要なことは，なるべく交換関係，反交換関係が使えるように変形していくところにある．このとき，フェルミ的変数の間は反交換関係が，それ以外の変数の間は交換関係が必ず現れているはずである．もし，そうでなければ，式の変形のどこかで符号を間違えている可能性が高い．そのときはもう一度見直そう．上では変数の積の間の交換関係や反交換関係が現れた．これからも使われるであろう有用な公式を下にまとめておく．

交換関係，反交換関係の有用な公式

$$[AB\,,\,C] = A[\,B\,,\,C\,] + [\,A\,,\,C\,]B\,, \tag{7.50a}$$

$$[AB\,,\,C] = A\{\,B\,,\,C\,\} - \{\,A\,,\,C\,\}B\,, \tag{7.50b}$$

$$\{AB\,,\,C\} = A\{\,B\,,\,C\,\} - [\,A\,,\,C\,]B\,, \tag{7.50c}$$

$$\{AB\,,\,C\} = A[\,B\,,\,C\,] + \{\,A\,,\,C\,\}B\,. \tag{7.50d}$$

上の公式で，変数 A, B, C のどれがボース的変数でどれがフェルミ的変数かで，どの公式を使うかが決まる．そのとき，**反交換関係 $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$ に含まれる変数 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ はともにフェルミ的変数**でなければならない．**それ以外は交換関係**となっているはずだ．これらの公式を使えば，変数の積の数が増えても同様に交換関係，あるいは，反交換関係のみを使って計算できることがわかる．

■

演習問題 7.9　(7.50) 式を確かめよ．

7.8 超電荷と超対称性変換

第 6 章で議論したように，保存量は無限小変換の生成子というもう 1 つの役割を持つ．超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ の場合は，(質量殻上の) 無限小超対称性変換 (7.35) の生成子となっているはずだ．実際，$\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})$ は，次の交換関係を満たし超対称性変換の生成子となっていることを確かめることができる．

$$\frac{i}{\hbar}\,[\,\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})\,,\,q\,] = \varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta \overset{(7.35)}{=} \bar{\delta}q\,, \tag{7.51a}$$

$$\frac{i}{\hbar}\,[\,\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})\,,\,\eta\,] = \varepsilon\,(\,ip - W'(q)\,) \overset{(7.35)}{=} \bar{\delta}\eta\,, \tag{7.51b}$$

$$\frac{i}{\hbar}\,[\,\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})\,,\,\eta^\dagger\,] = \varepsilon^\dagger\,(\,-ip - W'(q)\,) \overset{(7.35)}{=} \bar{\delta}\eta^\dagger\,. \tag{7.51c}$$

≪ (7.51) 式の証明 ≫

(7.51) 式の左辺の交換関係の計算は，公式 (7.50) を駆使すれば $q, p, \eta, \eta^\dagger$ の間の交換関係，あるいは，反交換関係の計算にもっていくことができる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}[\sqrt{\hbar}(\varepsilon Q^\dagger - \varepsilon^\dagger Q),\, q] \\
&\overset{(7.49)}{=} \frac{i}{\hbar}[\varepsilon(p+iW'(q))\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger(p-iW'(q))\eta,\, q] \\
&= \frac{i}{\hbar}\Big(\varepsilon(p+iW'(q))[\eta^\dagger,\, q] + \varepsilon[(p+iW'(q)),\, q]\eta^\dagger \\
&\quad +[\varepsilon,\, q](p+iW'(q))\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger(p-iW'(q))[\eta,\, q] \\
&\quad -\varepsilon^\dagger[(p-iW'(q)),\, q]\eta - [\varepsilon^\dagger,\, q](p-iW'(q))\eta\Big) \\
&\qquad (\because [ABC,D] = AB[C,D] + A[B,D]C + [A,D]BC) \\
&= \frac{i}{\hbar}\Big(0 + \varepsilon(-i\hbar)\eta^\dagger + 0 - 0 - \varepsilon^\dagger(-i\hbar)\eta - 0\Big) \\
&\qquad (\because \text{量子化条件 (7.46) 式，および，(7.47) 式をもちいた}) \\
&= \varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}[\sqrt{\hbar}(\varepsilon Q^\dagger - \varepsilon^\dagger Q),\, \eta] \\
&\overset{(7.49)}{=} \frac{i}{\hbar}[\varepsilon(p+iW'(q))\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger(p-iW'(q))\eta,\, \eta] \\
&= \frac{i}{\hbar}\Big(\varepsilon(p+iW'(q))\{\eta^\dagger,\, \eta\} - \varepsilon[(p+iW'(q)),\, \eta]\eta^\dagger \\
&\quad -\{\varepsilon,\, \eta\}(p+iW'(q))\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger(p-iW'(q))\{\eta,\, \eta\} \\
&\quad +\varepsilon^\dagger[(p-iW'(q)),\, \eta]\eta + \{\varepsilon^\dagger,\, \eta\}(p-iW'(q))\eta\Big) \\
&\qquad (\because [ABC,D] = AB\{C,D\} - A[B,D]C - \{A,D\}BC) \\
&= \frac{i}{\hbar}\Big(\varepsilon(p+iW'(q))\hbar - 0 - 0 - 0 + 0 + 0\Big) \\
&\qquad (\because \text{量子化条件 (7.46) 式，および，(7.47) 式をもちいた}) \\
&= \varepsilon(ip - W'(q)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}[\sqrt{\hbar}(\varepsilon Q^\dagger - \varepsilon^\dagger Q),\, \eta^\dagger] = \Big(\frac{i}{\hbar}[\sqrt{\hbar}(\varepsilon Q^\dagger - \varepsilon^\dagger Q),\, \eta]\Big)^\dagger \\
&= \big(\varepsilon(ip - W'(q))\big)^\dagger = \varepsilon^\dagger(-ip - W'(q)).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

$q, \eta, \eta^\dagger$ に対する無限小超対称性変換は，(7.51) 式から演算子 $\sqrt{\hbar}(\varepsilon Q^\dagger - \varepsilon^\dagger Q)$ との交換関係（に $i/\hbar$ をかけたもの）で与えられることがわかった．すなわち，

$$
\bar{\delta}\mathcal{O} = \frac{i}{\hbar}[\sqrt{\hbar}(\varepsilon Q^\dagger - \varepsilon^\dagger Q),\, \mathcal{O}]. \tag{7.52}
$$

(7.51) 式では，$\mathcal{O}$ が $q, \eta, \eta^\dagger$ の場合に確かめたが，実際は，変数 $\{q, p, \eta, \eta^\dagger\}$ からなる任意の関数 $\mathcal{O}(q, p, \eta, \eta^\dagger)$ に対して上式は成り立つ．交換関係を使って直接証明できるが，交換関係とユニタリー変換の間の対応をより深く理解するために，以下ではユニタリー変換を使った証明を与えることにする．**無限小変換の背後にはユニタリー変換が控えていることを肌で感じ取ってほしい．**

まず，$\bar{\delta}\mathcal{O}(q, p, \eta, \eta^\dagger)$ の正確な定義を与えておく．

$$\bar{\delta}\mathcal{O}(q,p,\eta,\eta^\dagger)$$
$$\equiv \mathcal{O}(q+\bar{\delta}q, p+\bar{\delta}p, \eta+\bar{\delta}\eta, \eta^\dagger+\bar{\delta}\eta^\dagger) - \mathcal{O}(q,p,\eta,\eta^\dagger). \tag{7.53}$$

ここでユニタリー演算子 U を次式で導入する.

$$U \equiv \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})\right\}. \tag{7.54}$$

これは, 無限小変換の生成子 $\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})$ を指数の肩に上げたものだ. U がユニタリー, すなわち, $U^\dagger = U^{-1}$ であることは, $\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q}$ がエルミート演算子であることと, 公式 $(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}, (e^X)^{-1} = e^{-X}$ から確かめられる. ここで鍵となるのは, 無限小変換におけるユニタリー変換と交換関係を結ぶ次の関係式である.

$$U\,X\,U^{-1} \simeq X + \frac{i}{\hbar}\left[\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})\,,\,X\right]. \tag{7.55}$$

ここでは, $\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ は無限小パラメータとして, 右辺は 1 次まで残している. また, 任意の演算子 X に対して上式は成り立つ. (7.55) 式の関係をもちいると, (7.53) 式の右辺第 1 項は次のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(q+\bar{\delta}q, p+\bar{\delta}p, \eta+\bar{\delta}\eta, \eta^\dagger+\bar{\delta}\eta^\dagger) \\
&\quad\simeq\quad \mathcal{O}(UqU^{-1}, UpU^{-1}, U\eta U^{-1}, U\eta^\dagger U^{-1}) \\
&\qquad\qquad (\because \text{(7.51) 式と (7.55) 式をもちいた.}) \\
&\quad=\quad U\mathcal{O}(q,p,\eta,\eta^\dagger)U^{-1} \\
&\quad\overset{(7.55)}{\simeq}\quad \mathcal{O}(q,p,\eta,\eta^\dagger) + \tfrac{i}{\hbar}\left[\sqrt{\hbar}(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})\,,\,\mathcal{O}(q,p,\eta,\eta^\dagger)\right].
\end{aligned} \tag{7.56}$$

ここで, 2 番目の等式では, $\mathcal{O}(q,p,\eta,\eta^\dagger)$ が変数 $\{q,p,\eta,\eta^\dagger\}$ に関してテイラー展開可能として, 変数 $\{q,p,\eta,\eta^\dagger\}$ の多項式で与えられると仮定した*22). (7.56) 式を (7.53) 式に代入すれば, (7.52) 式が得られる. したがって, **$\sqrt{\hbar}\,(\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\mathcal{Q})$ は任意の演算子に対する無限小超対称性変換の生成子**となっていることが確かめられた.

7.9 フェルミ粒子数演算子

作用積分のもつ対称性, あるいは, 不変性を完全に把握することは, その系を理解する上で基本中の基本だ. 作用積分 (7.4) は期待どおり, 超対称性変換 (7.31) のもとでの不変性をもっていた. 超対称性の他に何か不変性が存在するか？　それがこの節での課題だ.

*22) ここでは, $U(X_1X_2\cdots X_n)U^{-1} = (UX_1U^{-1})(UX_2U^{-1})\cdots(UX_nU^{-1})$ が成り立つことをもちいた.

7.9.1 $U(1)$ 対称性と保存量

対称性や不変性を探すには，ハミルトニアンでも可能だが，ネーターの定理が使えるラグランジアン（あるいは作用積分）のほうが便利だ．これまで調べてきた（質量殻上の）ラグランジアン $\bar{L}$

$$\bar{L}(q,\eta,\eta^\dagger) = \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\,\eta^\dagger\eta \right\} \tag{7.57}$$

は，超対称性変換 (7.35) のもとで（全時間微分項を除いて）不変であったが，それ以外の不変性はないだろうか？　対称性や不変性の議論に慣れていれば，$\eta, \eta^\dagger$ が複素変数であることから直ちに，ラグランジアンが次の **$U(1)$ 対称性**をもつことに気が付くはずだ．

$$U(1)\ 変換：\begin{cases} q \ \to\ q' = q\,, \\ \eta \ \to\ \eta' = e^{i\alpha}\,\eta\,, \\ \eta^\dagger \ \to\ \eta'^\dagger = e^{-i\alpha}\,\eta^\dagger\,. \end{cases} \tag{7.58}$$

ここで，α は $0 \leq \alpha < 2\pi$ の値をとる任意の実パラメータである．ラグランジアン $\bar{L}$ は，η と $\eta^\dagger$ を $\eta^\dagger\eta$ の組合せでしか含んでいないので，$U(1) : \eta^\dagger\eta \to \eta'^\dagger\eta' = \eta^\dagger\eta$ と $U(1)$ 変換のもとで不変である．したがって，ネーターの定理より，次の “フェルミ粒子” 数演算子 $\hat{F}$ が保存する．

$$\hat{F} \equiv \frac{1}{\hbar}\,\eta\,\eta^\dagger\,. \tag{7.59}$$

ここでは，補助場 F と区別するために，フェルミ粒子数演算子には $\wedge$（ハット）をつけて $\hat{F}$ と表すことにする．混乱しないようにしてほしい．

≪ $\hat{F}$ が保存することの証明 ≫

(7.58) 式を無限小変換の形で書き直しておくと，$|\alpha| \ll 1$ として

$$\begin{cases} q \to q' = q + \delta q\,, & \delta q = 0\,, \\ \eta \to \eta' = \eta + \delta\eta\,, & \delta\eta = +i\alpha\eta\,, \\ \eta^\dagger \to \eta'^\dagger = \eta^\dagger + \delta\eta^\dagger\,, & \delta\eta^\dagger = -i\alpha\eta^\dagger\,. \end{cases} \tag{7.60}$$

$U(1)$ 変換のもとでラグランジアンは不変 $\delta\bar{L} = 0$ なので，ネーターの定理より次の量が保存する．

$$\delta q \frac{\partial}{\partial\dot{q}}\,\bar{L} + \delta\eta \frac{\partial}{\partial\dot{\eta}}\,\bar{L} + \delta\eta^\dagger \frac{\partial}{\partial\dot{\eta}^\dagger}\,\bar{L} = 0 + (+i\alpha\eta)\,(-i\eta^\dagger) + 0 = \alpha\,\eta\,\eta^\dagger\,.$$

α は任意のパラメータなので，$\eta\eta^\dagger$ が保存することになる．　Q.E.D.

$\hat{F} = \frac{1}{\hbar}\eta\eta^\dagger$ が保存量であることはネーターの定理から保証されるが，直接そのことを確かめることも重要である．（$\hat{F}$ の定義に $\frac{1}{\hbar}$ をつけたのは，次節で確かめるように，$\hat{F}$ の固有値が $0, 1$ となるようにしたかったからだ．）

演習問題 7.10　$\hat{F} = \frac{1}{\hbar}\eta\eta^\dagger$ が保存すること $\left(\frac{d\hat{F}}{dt} = 0\right)$ を，η と $\eta^\dagger$ の運動方程式を使って直接確かめよ．

7.9.2 $\hat{F}$ の性質

$\hat{F}$ は “フェルミ粒子” 数演算子*[23] と呼ばれるが，その特徴的な性質は，$\hat{F}$ の固有値が 0 と 1 の 2 種類しかないという点にある．

$$\hat{F}\text{の固有値} = 0 \quad \text{または} \quad 1. \tag{7.61}$$

この結果は，$\hat{F}$ がエルミートであり，次の関係式を満たすことから導かれる．

$$\hat{F}^2 = \hat{F}. \tag{7.62}$$

この式の証明は簡単である．量子化条件 $\eta^\dagger\eta+\eta\eta^\dagger = \hbar$，および，$\eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0$ をもちいて上式左辺を変形すればよい．

$$\hat{F}^2 = \frac{1}{\hbar^2}\,\eta\eta^\dagger\,\eta\eta^\dagger = \frac{1}{\hbar^2}\,\eta\,(-\eta\eta^\dagger + \hbar)\,\eta^\dagger = \frac{1}{\hbar}\,\eta\eta^\dagger = \hat{F}. \tag{7.63}$$

(7.62) 式から $\hat{F}$ の固有値が 0 または 1 であることを導くことは容易い．$\hat{F}$ の固有関数を Ψ_λ として，その固有値を λ としておく．Ψ_λ は $\hat{F}\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda$ を満たすので，(7.62) 式は $\lambda^2 = \lambda$ となり，この式の解は $\lambda = 0, 1$ の 2 つしかない．したがって，$\hat{F}$ の固有値は 0 または 1 となる．

$\hat{F}$ と $q, \eta, \eta^\dagger$ の間の交換関係も計算しておこう．これらの関係式は，すぐ後で役に立つ．

$$[\,\hat{F}\,,\,q\,] = 0\,, \tag{7.64a}$$

$$[\,\hat{F}\,,\,\eta\,] = +\eta\,, \tag{7.64b}$$

$$[\,\hat{F}\,,\,\eta^\dagger\,] = -\eta^\dagger\,. \tag{7.64c}$$

上式の物理的意味は，$q, \eta, \eta^\dagger$ はそれぞれ “フェルミ” 粒子数 $0, +1, -1$ をもつということだ．

≪ (7.64) 式の証明 ≫

(7.64) 式の証明はフェルミ的変数の計算に慣れるためのいい練習問題だ．

$$[\,\hat{F}\,,\,q\,] = \left[\,\frac{1}{\hbar}\,\eta\eta^\dagger\,,\,q\,\right] \overset{(7.50\text{a})}{=} \frac{1}{\hbar}\,\eta\,[\,\eta^\dagger\,,\,q\,] + \frac{1}{\hbar}\,[\,\eta\,,\,q\,]\,\eta^\dagger = 0\,,$$

$$[\,\hat{F}\,,\,\eta\,] = \left[\,\frac{1}{\hbar}\,\eta\eta^\dagger\,,\,\eta\,\right] \overset{(7.50\text{b})}{=} \frac{1}{\hbar}\,\eta\,\{\,\eta^\dagger\,,\,\eta\,\} - \frac{1}{\hbar}\,\{\,\eta\,,\,\eta\,\}\,\eta^\dagger = \eta\,,$$

$$[\,\hat{F}\,,\,\eta^\dagger\,] = \left[\,\frac{1}{\hbar}\,\eta\eta^\dagger\,,\,\eta^\dagger\,\right] \overset{(7.50\text{b})}{=} \frac{1}{\hbar}\,\eta\,\{\,\eta^\dagger\,,\,\eta^\dagger\,\} - \frac{1}{\hbar}\,\{\,\eta\,,\,\eta^\dagger\,\}\,\eta^\dagger = -\eta^\dagger\,.$$

Q.E.D.

---

*23) 第 3 章でコメントしたように，超対称量子力学では，実際のフェルミ粒子数を数える演算子には対応していない．$\eta, \eta^\dagger$ がスピンの自由度をもった場の変数ならば，この用語は正しい．あくまで，フェルミ的変数 $\eta, \eta^\dagger$ から構成されているので，場の量子論での用語をそのままここでは流用している．

第 3 章，第 4 章でエネルギースペクトラムの縮退を示すために固有値 ± 1 をもつ演算子 $(-1)^{\hat{F}}$ を導入したが*24)，そのときは $(-1)^{\hat{F}}$ の肩に乗っている $\hat{F}$ の定義を与えていなかった．いまや $\hat{F}$ の起源とその物理的意味は明らかだ．$\hat{F}$ は (7.58) 式の $U(1)$ 変換のもとでの不変性に基づく保存量であり，$\hat{F}=\frac{1}{\hbar}\eta\eta^\dagger$ と与えられる量である．$\hat{F}$ の固有値 0 に属する固有状態を $|f=0\rangle$（すなわち，$\hat{F}|f=0\rangle=0$）としておくと，$\eta|f=0\rangle$ は $\hat{F}$ の固有値 1 の固有状態 $|f=1\rangle$ に比例する．なぜなら，

$$\hat{F}\big(\eta|f=0\rangle\big) \overset{(7.64\text{b})}{=} (\eta\hat{F}+\eta)|f=0\rangle = \big(\eta|f=0\rangle\big)\,, \tag{7.65}$$

を満たすからである．一方，$|f=1\rangle$ に $\eta^\dagger$ をかけた状態 $\eta^\dagger|f=1\rangle$ は $|f=0\rangle$ に比例する．なぜなら，

$$\hat{F}\big(\eta^\dagger|f=1\rangle\big) \overset{(7.64\text{c})}{=} (\eta^\dagger\hat{F}-\eta^\dagger)|f=1\rangle = (\eta^\dagger-\eta^\dagger)|f=1\rangle = 0\,, \tag{7.66}$$

となるからである．ここで興味を引くのは，(7.65) 式と (7.66) 式から η は $\hat{F}$ の固有値を 1 増やし，$\eta^\dagger$ は 1 減らすが，それ以上は $\hat{F}$ の固有値を増やしたり減らしたりすることはできないことである．それはフェルミ的演算子の特徴であるベキ零性 $\eta^2|f=0\rangle=0$，および，$(\eta^\dagger)^2|f=1\rangle=0$ から導かれる．このことから，$\hat{F}$ の固有値がなぜ 0 と 1 に限られていたかが理解できる．

演算子 $(-1)^{\hat{F}}$ は (-1) の肩に演算子が乗っているので，なんとなくその定義が気になる人もいるだろう．実は何とも不思議なことに，演算子 $(-1)^{\hat{F}}$ は $1-2\hat{F}$ に等しい．すなわち，

$$(-1)^{\hat{F}} = 1-2\hat{F}\,. \tag{7.67}$$

まず，$\hat{F}$ を 0，あるいは，1 とおいたときに，両辺の値が等しいことを目で確かめてほしい．実際，上の関係は次のようにテイラー展開をもちいて証明できる．

≪ (7.67) 式の証明 ≫

$$\begin{aligned}
(-1)^{\hat{F}} &= (e^{i\pi})^{\hat{F}} = e^{i\alpha\hat{F}}\Big|_{\alpha=\pi} \qquad (\because e^{i\pi}=-1)\\
&= \left[1+i\alpha\hat{F}+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\hat{F}^2+\frac{(i\alpha)^3}{3!}\hat{F}^3+\cdots\right]\Big|_{\alpha=\pi}\\
&= \left[1+\left(i\alpha+\frac{(i\alpha)^2}{2!}+\frac{(i\alpha)^3}{3!}+\cdots\right)\hat{F}\right]\Big|_{\alpha=\pi} \qquad (\because \hat{F}^2=\hat{F})\\
&= \left[1-\hat{F}+\left(1+i\alpha+\frac{(i\alpha)^2}{2!}+\frac{(i\alpha)^3}{3!}+\cdots\right)\hat{F}\right]\Big|_{\alpha=\pi}\\
&= \left[1-\hat{F}+e^{i\alpha}\hat{F}\right]\Big|_{\alpha=\pi}\\
&= 1-2\hat{F}\,.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

*24） この章では，補助場 F と区別するために，フェルミ粒子数演算子を $\hat{F}$ と表している．

7.9.3 $U(1)$ 変換の生成子

ここまでで，$U(1)$ 対称性に基づく保存量が $\hat{F}=\frac{1}{\hbar}\eta\eta^\dagger$ であること，および，その固有値が 0 または 1 であることを明らかにした．あなたがこれで満足したとしたら，対称性と保存量に関する理解はまだ半分だ．保存量 $\hat{F}$ が，（もう 1 つの役割である）$U(1)$ 変換の生成子となっていることを確かめる作業が残っている．それが終わったらやっと一段落だ．有限変換ならば，(7.58) 式をユニタリー変換として表した次式を確かめる必要がある．

$$\begin{cases} q \ \rightarrow \ q' = U(\alpha)\, q\, U(\alpha)^{-1} = q\,, \\ \eta \ \rightarrow \ \eta' = U(\alpha)\, \eta\, U(\alpha)^{-1} = e^{i\alpha}\, \eta\,, \\ \eta^\dagger \ \rightarrow \ \eta'^\dagger = U(\alpha)\, \eta^\dagger\, U(\alpha)^{-1} = e^{-i\alpha}\, \eta^\dagger\,, \quad U(\alpha) \equiv \exp\left\{i\alpha\hat{F}\right\}. \end{cases} \tag{7.68}$$

無限小変換ならば，(7.60) 式を交換関係で表した次式を確かめる必要がある．

$$\begin{cases} \delta q = [\,i\alpha\hat{F}\,,\, q\,] = 0\,, \\ \delta\eta = [\,i\alpha\hat{F}\,,\, \eta\,] = +i\alpha\eta\,, \\ \delta\eta^\dagger = [\,i\alpha\hat{F}\,,\, \eta^\dagger\,] = -i\alpha\eta^\dagger\,. \end{cases} \tag{7.69}$$

≪ (7.68) 式および (7.69) 式の証明 ≫

まずは易しい (7.69) 式のほうから確かめよう．これまで何度も注意してきたように，交換関係をばらすことなく，交換関係，あるいは，反交換関係のままで計算する癖をきちんと身につけよう．

$$[i\alpha\hat{F},q] = \frac{i\alpha}{\hbar}[\eta\eta^\dagger,q] = \frac{i\alpha}{\hbar}\big(\eta[\eta^\dagger,q]+[\eta,q]\eta^\dagger\big) = 0\,,$$
$$[i\alpha\hat{F},\eta] = \frac{i\alpha}{\hbar}[\eta\eta^\dagger,\eta] = \frac{i\alpha}{\hbar}\big(\eta\{\eta^\dagger,\eta\}-\{\eta,\eta\}\eta^\dagger\big) = i\alpha\eta\,,$$
$$[i\alpha\hat{F},\eta^\dagger] = \frac{i\alpha}{\hbar}[\eta\eta^\dagger,\eta^\dagger] = \frac{i\alpha}{\hbar}\big(\eta\{\eta^\dagger,\eta^\dagger\}-\{\eta,\eta^\dagger\}\eta^\dagger\big) = -i\alpha\eta^\dagger\,,$$

有限のユニタリー変換 (7.68) を証明する方法はいくつかある．おそらく，その中でもっともエレガントな証明は，微分方程式による解法だろう．(7.68) 式の第 1 行目は，q と $\eta,\eta^\dagger$ が可換なので自明な関係である．ここでは，2 行目の関係 $U(\alpha)\,\eta\, U(\alpha)^{-1}=e^{i\alpha}\,\eta$ を証明する．そのために，$f(\alpha)\equiv U(\alpha)\,\eta\,U(\alpha)^{-1}$ を定義して α で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\big(e^{i\alpha\hat{F}}\,\eta\, e^{-i\alpha\hat{F}}\big) \\ &= e^{i\alpha\hat{F}}\,[\,i\hat{F}\,,\,\eta\,]\,e^{-i\alpha\hat{F}} \\ &\overset{(7.69)}{=} e^{i\alpha\hat{F}}\,i\eta\, e^{-i\alpha\hat{F}} = if(\alpha) \end{aligned}$$

となる．したがって，$f(\alpha)$ は 1 階微分方程式 $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}=if(\alpha)$ を満たす．この方程式を初期条件 $f(0)=\eta$ のもとで解くと

$$f(\alpha) = e^{i\alpha}f(0) = e^{i\alpha}\eta$$

となる．これは，求めたかった関係式に他ならない．同様に，$\eta^\dagger$ に関するユニタリー変換も証明することができる． Q.E.D.

7.10 ラグランジアン形式と行列表示

第 4 章で議論したウィッテン模型は，2×2 行列を使って表現されていた．一方，この章で与えたラグランジアンやハミルトニアンは行列では表現されておらず，一見すると異なる理論のように見える．しかしながら，フェルミ的変数 $\eta, \eta^\dagger$ の満たす性質をじっくり眺めてみると，$\eta, \eta^\dagger$ を行列で表現できることがわかる．それによって，ウィッテン模型が再現されることを以下で示そう．

フェルミ的変数 $\eta, \eta^\dagger$ は量子化によって，次の反交換関係を満たさねばならないことをみた．

$$\{\eta^\dagger, \eta\} = \hbar \qquad \Longrightarrow \quad \eta^\dagger \eta + \eta \eta^\dagger = \hbar, \tag{7.70a}$$

$$\{\eta, \eta\} = \{\eta^\dagger, \eta^\dagger\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0\,. \tag{7.70b}$$

これらの関係式は見慣れない奇妙なものにみえるかもしれない．しかし，よくみてみると，それほど不思議な条件式ではないことがわかる．単なる数では (7.70) 式を実現することはできないが，行列を使うとこれらの関係式が簡単に実現できる．実際，次の 2×2 行列は (7.70) 式を満たすことが直接確かめられる．

$$\eta \equiv \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta^\dagger \equiv \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.71}$$

ただし，(7.70a) 式右辺は 2×2 単位行列 I_2（の $\hbar$ 倍），(7.70b) 式右辺は 2×2 零行列と解釈する必要がある．すなわち，

$$\eta^\dagger \eta + \eta \eta^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.72a}$$

$$\eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.72b}$$

読者はここで，(7.71) 式で定義される行列は確かに (7.70) 式を満たすが，それ以外の行列でそれらを満たすものはないのか？　という疑問を抱くかもしれない．それはもっともな疑問だ．この点に関しては，この節の最後で議論することにして，しばらくは (7.71) 式の行列表示で話を進めていくことにする．

(7.71) 式の行列表示をもちいて，複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$，演算子 $(-1)^{\hat{F}} = 1 - 2\hat{F}$，ハミルトニアン H を表すと，次の 2×2 行列で表されることになる．

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\left(p - iW'(q)\right)\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p - iW'(q) & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.73a}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\left(p + iW'(q)\right)\eta^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & p + iW'(q) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.73b}$$

$$(-1)^{\hat{F}} = 1 - 2\hat{F} = 1 - \frac{2}{\hbar}\eta\eta^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.73c}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\{\,\mathcal{Q}^\dagger\,,\,\mathcal{Q}\,\} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\bigl(W'(q)\bigr)^2 - \frac{\hbar}{2}W''(q) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\bigl(W'(q)\bigr)^2 + \frac{\hbar}{2}W''(q) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.73d}$$

これらの演算子が作用する波動関数 $\Psi(x)$ は 2 成分をもつことになる.

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}. \tag{7.74}$$

したがって，第 4 章のウィッテン模型が完全に再現されたことになり，この章で与えたラグランジアン (7.4) はウィッテン模型と等価な系を記述することが示されたことになる.

最後に，(7.71) 式で与えた $\eta, \eta^\dagger$ の行列表示が唯一のものなのか，それとも他に同じ関係式 (7.70) を満たすものがあるという疑問に答えておこう．(7.70) 式を満たす本質的に異なる行列表現がどれだけ存在するのか，というのがここで問題となるポイントである．これを以下で明らかにしておこう．η と $\eta^\dagger$ が 2×2 正方行列で表されていると仮定する．η と $\eta^\dagger$ の満たすべき関係式

$$\eta^\dagger\eta + \eta\eta^\dagger = \hbar, \tag{7.75a}$$

$$\eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0, \tag{7.75b}$$

をじっと眺めると，ユニタリー行列 U を使った次の変換

$$\eta \quad \longrightarrow \quad \eta' \equiv U\eta U^{-1}, \tag{7.76a}$$

$$\eta^\dagger \quad \longrightarrow \quad \eta'^\dagger \equiv U\eta^\dagger U^{-1}, \tag{7.76b}$$

のもとで，(7.75) 式が不変であることがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned} &\eta'^\dagger\eta' + \eta'\eta'^\dagger \overset{(7.76)}{=} U(\eta^\dagger\eta + \eta\eta^\dagger)U^{-1} \overset{(7.75a)}{=} \hbar, \\ &(\eta')^2 \overset{(7.76)}{=} U\eta^2 U^{-1} \overset{(7.75b)}{=} 0, \\ &(\eta'^\dagger)^2 \overset{(7.76)}{=} U(\eta^\dagger)^2 U^{-1} \overset{(7.75b)}{=} 0. \end{aligned} \tag{7.77}$$

この不変性の意味することは，(7.75) 式を満たす行列 $\eta, \eta^\dagger$ がみつかったとすると，$\eta' \equiv U\eta U^{-1}$, $\eta'^\dagger \equiv U\eta^\dagger U^{-1}$ で定義される行列 $\eta', \eta'^\dagger$ も同じ関係式を満たすということである．したがって，$\eta', \eta'^\dagger$ の行列表示はユニタリー変換 (7.76) の分だけ不定性を持つことになる．逆にこのユニタリー変換の自由度をもちいて，$\hat{F} = \frac{1}{\hbar}\eta\eta^\dagger$ を対角化する表示にもっていくことができる．なぜなら，$\hat{F}$ はエルミート演算子（今の場合はエルミート行列）なので，ユニタリー変換で必

ず対角化可能だからである．対角化された表示では，対角成分に $\hat{F}$ の固有値 $\{0,1\}$ がくるので，

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.78}$$

と表されることになる．次に，$\eta, \eta^\dagger$ の行列表示を求めるために，$\eta^\dagger\eta + \eta\eta^\dagger = \hbar$ の両辺に η をかけて $\eta^2 = 0$ をもちいると $\eta\eta^\dagger\eta = \hbar\eta$，すなわち，

$$(\eta\eta^\dagger - \hbar)\,\eta = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\hat{F} - I_2)\,\eta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta = 0\,. \tag{7.79}$$

この条件式と $\eta^2 = (\eta^\dagger)^2 = 0$ および $\eta^\dagger\eta + \eta\eta^\dagger = \hbar$ から，2×2 行列 η，および，エルミート共役 $\eta^\dagger$ は次の形をしていなければならないことがわかる．

$$\eta = \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{+i\beta} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta^\dagger = \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.80}$$

ここで，β は任意の実数である．最後に 7.9 節で考察した $U(1)$ 対称性をもちいて，$U(1)$ 変換：$\eta \to e^{-i\beta}\eta,\ \eta^\dagger \to e^{+i\beta}\eta^\dagger$ を施すことによって，(7.71) 式の行列表示が得られたことになる．

ここで，行ったことをまとめると，$\eta, \eta^\dagger$ を行列で表す際に，ユニタリー変換 (7.76)，および，$U(1)$ 変換の不変性を使って，一般性を失うことなく (7.71) 式の表示にもって行けるということである．

2×2 行列以外で (7.70) 式を満たす行列 $\eta, \eta^\dagger$ は存在するかという問いに対しては,「存在する」というのが答えである．たとえば，

$$\eta = \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta^\dagger = \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.81}$$

も同様の式を満たす．しかしながら，この場合は (7.73) 式で与えた 2×2 行列の量子力学系を単に 2 つもってきただけにすぎず，何ら新しい物理を含んではいない．したがって，$\eta, \eta^\dagger$ に対して 2×2 行列表示 (7.71) の場合を考えれば物理的には十分だということになる．

7.11 Q–完全形式

ここでは，再び $\eta, \eta^\dagger$ をもちいた作用積分

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + W'(q)F + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\eta^\dagger\eta\right], \tag{7.82}$$

あるいは，質量殻上の作用積分

$$\bar{S} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(W'(q))^2 + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\eta^\dagger\eta\right], \tag{7.83}$$

に戻って議論することにしよう．この作用積分の形をみてすぐに，超対称性をもつと言い切れる人は少ないだろう．もっとも，この作用積分は超対称量子力学模型の中で簡単なものなので，一度知ってしまえばそれも可能かもしれない．しかし，自由度が増えてもっと複雑な模型になれば，一目で超対称性の存在を見抜くことは至難の業となる．それでは，超対称性が明白な形で見てとれるような作用積分の表示はないだろうか？　これがこの節の主題である．

7.11.1　$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ のベキ零性

7.5 節で $\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ を次式で導入した（(7.33) 式参照）．

$$\begin{cases} \delta_Q q = \eta\,, \\ \delta_Q \eta = 0\,, \\ \delta_Q \eta^\dagger = i\dot{q} - F\,, \\ \delta_Q F = i\dot{\eta}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_{Q^\dagger} q = \eta^\dagger\,, \\ \delta_{Q^\dagger} \eta = i\dot{q} + F\,, \\ \delta_{Q^\dagger} \eta^\dagger = 0\,, \\ \delta_{Q^\dagger} F = -i\dot{\eta}^\dagger\,. \end{cases} \tag{7.84}$$

$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ は超対称性変換 (7.31) から $\delta\mathcal{O} = (\varepsilon\delta_{Q^\dagger} - \varepsilon^\dagger\delta_Q)\mathcal{O}$ として（$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ を取り除いて）定義されているので，$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ はフェルミ的演算子であることに注意しておこう*25)．このとき，$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ は次の関係式を満たす．

$$\left\{\,\delta_{Q^\dagger}\,,\,\delta_Q\,\right\}\mathcal{O} = 2i\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{O}\,, \tag{7.85a}$$

$$(\delta_Q)^2\,\mathcal{O} = (\delta_{Q^\dagger})^2\,\mathcal{O} = 0\,. \tag{7.85b}$$

7.5 節で具体的に確かめたのは，$\mathcal{O} = q, \eta, \eta^\dagger, F$ の場合のみであったが，上の関係は $q, \eta, \eta^\dagger, F$ からなる任意の関数 $\mathcal{O}(q, \eta, \eta^\dagger, F)$ に対しても成り立つ．したがって，(7.85) 式を次のように書き表してもよいだろう．

$$\left\{\,\delta_{Q^\dagger}\,,\,\delta_Q\,\right\} = 2i\,\frac{d}{dt}\,, \tag{7.86a}$$

$$(\delta_Q)^2 = (\delta_{Q^\dagger})^2 = 0\,. \tag{7.86b}$$

≪ (7.86) 式の証明 ≫

まず，$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ は変数の積に対して次の演算規則（いわゆる積のルール）にしたがうものとする．

$$\delta_Q(AB) = \begin{cases} (\delta_Q A)B + A(\delta_Q B), & A\ \text{がボース的変数} \\ (\delta_Q A)B - A(\delta_Q B), & A\ \text{がフェルミ的変数} \end{cases} \tag{7.87}$$

$\delta_{Q^\dagger}$ に対しても同様である．$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ はフェルミ的変数に対応するので，フェルミ的変数を飛び越えるときにはマイナス符号が現れることに注意しておく．2 つ以上の変数の積に対しては，上の公式をくり返し使えば求まる．(7.87) 式と $\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ が

*25)　$\delta\mathcal{O} = (\varepsilon\delta_{Q^\dagger} - \varepsilon^\dagger\delta_Q)\mathcal{O}$ は，$\mathcal{O}$ と同じ統計性をもつ．したがって，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ を取り除いて定義された $\delta_Q\mathcal{O}, \delta_{Q^\dagger}\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ と逆の統計性をもつことになる．

フェルミ的演算ということから，次の関係式が導かれる．

$$\{\delta_{Q^\dagger},\delta_Q\}(AB) = \big(\{\delta_{Q^\dagger},\delta_Q\}A\big)B + A\big(\{\delta_{Q^\dagger},\delta_Q\}B\big)\,, \tag{7.88a}$$
$$(\delta_Q)^2(AB) = \big((\delta_Q)^2 A\big)B + A\big((\delta_Q)^2 B\big)\,, \tag{7.88b}$$
$$(\delta_{Q^\dagger})^2(AB) = \big((\delta_{Q^\dagger})^2 A\big)B + A\big((\delta_{Q^\dagger})^2 B\big)\,. \tag{7.88c}$$

ここでは第 2 式のみ証明を与えておく．他の 2 式も同様に確かめることができる．

$$\begin{aligned}
(\delta_Q)^2\,(AB) \;&=\; \delta_Q\big(\,\delta_Q\,(AB)\,\big)\\
&\overset{(7.87)}{=}\; \delta_Q\big(\,(\delta_Q A)B \pm A\,(\delta_Q B)\,\big)\\
&\qquad (\because\ \text{第 2 項の} + \text{は } A \text{ がボース的}, - \text{はフェルミ的の場合})\\
&\overset{(7.87)}{=}\; (\delta_Q{}^2 A)B \mp (\delta_Q A)(\delta_Q B) \pm (\delta_Q A)(\delta_Q B) + A(\delta_Q{}^2 B)\\
&\qquad (\because\ \delta_Q \text{が } A \text{ または} \delta_Q \text{を飛び越えるときの符号に注意})\\
&=\; (\delta_Q{}^2 A)B + A(\delta_Q{}^2 B)\,.
\end{aligned}$$

上の式変形で注目すべき点は，$(\delta_Q A)(\delta_Q B)$ の項は相殺して現れないことだ．このことから，$(\delta_Q)^2$ はあたかもひとかたまりの演算子として働くことがわかる．$q,\eta,\eta^\dagger,F$ に対して (7.85) 式が成り立つことに注意して，$q,\eta,\eta^\dagger,F$ の任意の多項式 $\mathcal{O}(q,\eta,\eta^\dagger,F)$ に対して公式 (7.88) をくり返し適用すれば

$$\{\,\delta_{Q^\dagger}\,,\,\delta_Q\,\}\,\mathcal{O}(q,\eta,\eta^\dagger,F) = 2i\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{O}(q,\eta,\eta^\dagger,F)\,,$$
$$(\delta_Q)^2\,\mathcal{O}(q,\eta,\eta^\dagger,F) = (\delta_{Q^\dagger})^2\,\mathcal{O}(q,\eta,\eta^\dagger,F) = 0\,,$$

を導くことができる．ただし，上の第 1 式では，関数の積に対する微分の公式（ライプニッツ則）をもちいた．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A_1A_2\cdots A_n) \;=\; &\Big(\frac{d}{dt}A_1\Big)A_2\cdots A_n + A_1\Big(\frac{d}{dt}A_2\Big)\cdots A_n + \cdots\\
&+ A_1A_2\cdots\Big(\frac{d}{dt}A_n\Big)\,.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

7.11.2　作用積分の *Q*–完全形式による表示

以上の準備を踏まえて，この節の課題「超対称性が明白な作用積分の表示はあるか？」に答えることにしよう．$\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}$ をもちいた次の作用積分の表示（これを ***Q*–完全形式 (*Q*-exact form)** と呼ぶ）は，超対称性変換のもとでの不変性を自明な形で実現する．(証明はすぐ後で行う.)

作用積分の *Q*–完全形式による表示

$$\begin{aligned}
S \;&=\; \delta_{Q^\dagger}\delta_Q \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\Big[-\frac{1}{2}\,\eta^\dagger\eta + W(q)\Big]\\
&=\; -\delta_Q\,\delta_{Q^\dagger} \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\Big[-\frac{1}{2}\,\eta^\dagger\eta + W(q)\Big].
\end{aligned} \tag{7.89}$$

第 1 行目と第 2 行目右辺の等価性は，(7.86a) 式 $\big(\{\delta_Q, \delta_{Q^\dagger}\} = 2i\frac{d}{dt}\big)$ が保証してくれる．そのとき，時間の全微分項がおつりとして残るが，それは気にしなくてよい．なぜなら，作用積分に含まれる時間の全微分項は物理を変えないからである．この表示と $\delta_Q{}^2 = \delta_{Q^\dagger}{}^2 = 0$ から直ちに，作用積分の超対称性変換不変性

$$\delta_{\mathcal{Q}} S = \delta_{\mathcal{Q}^\dagger} S = 0 \tag{7.90}$$

が自明な形で実現されていることがわかる．この Q–完全形式による作用積分の超対称性の実現は，$\delta_{\mathcal{Q}}$ と $\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}$ の満たす関係 (7.86) が決定的な役割を果たす．(7.86) 式の関係は $N=2$ 超対称性代数

$$\{\, \mathcal{Q}^\dagger \,,\, \mathcal{Q} \,\} = 2H \,,$$
$$\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0 \,,$$

と対比すべきものなので，Q–完全形式での作用積分の表示 (7.89) は，$N=2$ 超対称性の特徴を反映したものと言えるだろう．では，(7.89) 式を確かめることにしよう．

≪ (7.89) 式の証明 ≫

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\delta_{\mathcal{Q}}\left[-\frac{1}{2}\eta^\dagger\eta\right] &\overset{(7.87)}{=} -\frac{1}{2}\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\left[(\delta_{\mathcal{Q}}\eta^\dagger)\,\eta - \eta^\dagger(\delta_{\mathcal{Q}}\eta)\right] \\
&\overset{(7.84)}{=} -\frac{1}{2}\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\left[(i\dot{q}-F)\,\eta - 0\right] \\
&\overset{(7.87)}{=} -\frac{1}{2}\left[(i\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\dot{q} - \delta_{\mathcal{Q}^\dagger}F)\,\eta + (i\dot{q}-F)\,\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\eta\right] \\
&\overset{(7.84)}{=} -\frac{1}{2}\left[\,(i\dot{\eta}^\dagger + i\dot{\eta}^\dagger)\eta + (i\dot{q}-F)(i\dot{q}+F)\,\right] \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 - i\dot{\eta}^\dagger\eta \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + i\eta^\dagger\dot{\eta} + \frac{d}{dt}\left[-i\eta^\dagger\eta\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\delta_{\mathcal{Q}}\Big[W(q)\Big] &= \delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\Big[W'(q)\,\delta_{\mathcal{Q}}q\Big] \overset{(7.84)}{=} \delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\Big[W'(q)\,\eta\Big] \\
&\overset{(7.84)}{=} \big(W''(q)\,\eta^\dagger\big)\,\eta + W'(q)\,\big(i\dot{q}+F\big) \\
&= W'(q)F + W''(q)\eta^\dagger\eta + \frac{d}{dt}\left[iW(q)\right].
\end{aligned}$$

作用積分の中では時間の全微分項を無視することができる．したがって，(7.89) 式が成り立つ．
Q.E.D.

■ コメント ■

- Q–完全形式から $\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\delta_{\mathcal{Q}}\big(-\frac{1}{2}\eta^\dagger\eta\big)$ 項と $\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}\delta_{\mathcal{Q}}\big(W(q)\big)$ 項はそれぞれ超対称性変換 $\delta_{\mathcal{Q}}$ および $\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}$ のもとで不変である．上の証明から，(7.89) 式右辺第 1 項は運動項 $\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + i\eta^\dagger\dot{\eta}$，第 2 項は相互作用項 $W'(q)F + W''(q)\eta^\dagger\eta$ を導くので，運動項と相互作用項はそれぞれ超対称性変換のもとで不変な組合せを構成していることがわかる．
- Q–完全形式による作用積分の表現は，超対称性をもつ作用積分の一般的構成法を与えてくれる．

■

作用積分 S を Q–完全形式に書き表したが，同様の解析が質量殻上の作用積

分 $\bar{S}$ に対してもできる．ただし，$\bar{S}$ の場合は，Q–完全形式で表すことが可能だが，質量殻上でのみ正しい．より正確には，運動方程式に比例する項がおつりとして現れる．この節での理解を確実にするために，質量殻上での Q–完全形式の導出は，読者の演習問題として残しておくことにする．

演習問題 7.11　(7.83) 式で与えられる質量殻上の作用積分 $\bar{S}$ が，運動方程式に比例する項を除いて，次の Q–完全形式で書き表せることを確かめよ．

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \bar{\delta}_{Q^\dagger}\bar{\delta}_Q \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[-\frac{1}{2}\,\eta^\dagger\eta + W(q)\right] + (\text{運動方程式に比例する項}) \\ &= -\bar{\delta}_Q\,\bar{\delta}_{Q^\dagger} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[-\frac{1}{2}\,\eta^\dagger\eta + W(q)\right] + (\text{運動方程式に比例する項})\,.\end{aligned}$$

ここで $\bar{\delta}_Q, \bar{\delta}_{Q^\dagger}$ は質量殻上の超対称性変換 (7.36) である．すなわち，

$$\begin{cases} \bar{\delta}_Q q = \eta\,, \\ \bar{\delta}_Q \eta = 0\,, \\ \bar{\delta}_Q \eta^\dagger = i\dot{q} + W'(q)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\delta}_{Q^\dagger} q = \eta^\dagger\,, \\ \bar{\delta}_{Q^\dagger} \eta = i\dot{q} - W'(q)\,, \\ \bar{\delta}_{Q^\dagger} \eta^\dagger = 0\,. \end{cases}$$

ヒント： 作用積分の中では，全微分項 $\frac{d}{dt}(\eta^\dagger\eta)$ や $\dot{q}\,W'(q) = \frac{d}{dt}\big(W(q)\big)$ などはゼロとしてよい．

7.12　ワード–高橋関係式

作用積分が不変性をもつと，一般に真空期待値，あるいは，相関関数と呼ばれる量の間に非自明な関係が現れる．これは，**ワード–高橋関係式 (Ward–Takahashi relation)***26) と呼ばれ，対称性の帰結として導かれる重要な関係式である．超対称性理論でも対応する式が存在する．それを紹介しておこう．ワード–高橋関係式の導出にはいろいろな方法があるが，ここでは超電荷との（反）交換関係をもちいた方法を紹介する．

7.12.1　真空期待値に対するワード–高橋関係式

ここでは，真空期待値に関するワード–高橋関係式を導くことにする．ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ をもつ超対称量子力学系を考える．ゼロエネルギー状態

---

*26)　量子電磁力学 (Quantum ElectroDynamics) において，ワード [16] が初めて導き，その後，高橋 [17] によって拡張された．これらの関係式はゲージ対称性の帰結である．歴史的な理由で，ほとんどの文献でワード–高橋の関係式はワード–高橋恒等式 **(identity)** と書かれている．しかしながら，この節で導かれている式は “恒等式” というよりも，関係式と呼ぶほうが適切であろう．柏太郎氏によると高橋さんは関係式 (relation) と呼ばれることを切に願っているそうだ．ここでは，高橋さんの意志を尊重して，「関係式」と呼ぶことにする．

$\Psi_{E=0}$ で任意の演算子 $\mathcal{O}$ を挟んだ期待値 $\langle\Psi_{E=0}|\,\mathcal{O}\,|\Psi_{E=0}\rangle$ をこの小節では考察する．演算子 $\mathcal{O}$ として特に，$\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}$ （あるいは $\varepsilon\mathcal{Q}^\dagger$）と任意の演算子 X との交換関係で与えられている場合がここでは重要になる[*27)]．

$$\langle\Psi_{E=0}|\,\frac{1}{i\hbar}\,[\,\sqrt{\hbar}\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}\,,\,X\,]\,|\Psi_{E=0}\rangle. \tag{7.91}$$

この量を 2 通りの方法で計算してみることにする．共に，超電荷 $\mathcal{Q}$ が超対称性変換の生成子であることをもちいるが，超電荷の作用を 1 つは X に対して，もう 1 つはゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ に対して行うことによって，非自明な関係式を得ることができる．

7.8 節で議論したように，交換関係 $\frac{1}{i\hbar}[\sqrt{\hbar}\varepsilon^\dagger\mathcal{Q},X]$ は X に対する（質量殻上の）超対称性変換と考えることができ，7.5 節での記号をもちいると

$$\varepsilon^\dagger\bar{\delta}_\mathcal{Q}X=\frac{1}{i\hbar}\,[\,\sqrt{\hbar}\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}\,,\,X\,] \tag{7.92}$$

と書き表すことができる．一方，(7.91) 式の交換関係をばらすと，

$$\begin{aligned}&\langle\Psi_{E=0}|\,\frac{1}{i\hbar}\,[\,\sqrt{\hbar}\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}\,,\,X\,]\,|\Psi_{E=0}\rangle\\&=\frac{\sqrt{\hbar}}{i\hbar}\langle\Psi_{E=0}|\,\left(\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}X-X\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}\right)|\Psi_{E=0}\rangle\\&=\frac{\sqrt{\hbar}}{i\hbar}\left(\left(\langle\Psi_{E=0}|\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}\right)X|\Psi_{E=0}\rangle-\frac{\sqrt{\hbar}}{i\hbar}\langle\Psi_{E=0}|X\left(\varepsilon^\dagger\mathcal{Q}|\Psi_{E=0}\rangle\right)\right),\end{aligned} \tag{7.93}$$

となり，この見方では，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ に対する超対称性変換とみなすことができる．これまで何度も議論してきたように，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ は超電荷 $\mathcal{Q}$ および $\mathcal{Q}^\dagger$ の作用のもとで消滅する．すなわち，

$$\mathcal{Q}\Psi_{E=0}=\mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E=0}=0\ \Rightarrow\ \mathcal{Q}|\Psi_{E=0}\rangle=0\ \text{および}\ \langle\Psi_{E=0}|\mathcal{Q}^\dagger=0\,, \tag{7.94}$$

となる．したがって，(7.91) 式を，演算子 X に対する超対称性変換，および，ゼロエネルギー状態 $\Psi_{E=0}$ に対する超対称性変換と 2 通りの見方をすることによって，次の関係式を得る[*28)]．

$$\langle\Psi_{E=0}|\,\bar{\delta}_\mathcal{Q}X\,|\Psi_{E=0}\rangle=0\,. \tag{7.95}$$

同様にして，

$$\langle\Psi_{E=0}|\,\bar{\delta}_{\mathcal{Q}^\dagger}X\,|\Psi_{E=0}\rangle=0\,, \tag{7.96}$$

が成り立つ．これらが，真空期待値に関するワード–高橋関係式と呼ばれるものである．

---

*27) 係数 $\frac{1}{i\hbar}$ や $\sqrt{\hbar}$ は (7.92) 式の関係が成り立つようにつけておいた．

*28) (7.95) 式を導くのに，$\varepsilon^\dagger$ は特に無くてもよかったのだが，(7.92) 式で $\bar{\delta}_\mathcal{Q}$ を定義するのに便利なので使った．$\varepsilon^\dagger$ を使わないと，X がボース的かフェルミ的変数かで，右辺の交換関係を反交換関係に変える必要が出てくる．

このままだと，上式の意味するものが，今ひとつピンと来ないと思うので，具体例でみてみよう．例として (7.95) 式で $X = q\eta^\dagger$ にとると，

$$\bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X = \bar{\delta}_{\mathcal{Q}}(q\eta^\dagger) \overset{(7.87)}{=} (\bar{\delta}_{\mathcal{Q}} q)\,\eta^\dagger + q\,(\bar{\delta}_{\mathcal{Q}}\eta^\dagger) \overset{(7.36)}{=} \eta\,\eta^\dagger + q\,(ip + W'(q))$$

となり，次の関係式が成り立つことになる．

$$\langle \Psi_{E=0} |\, \eta\,\eta^\dagger \,| \Psi_{E=0} \rangle = -\langle \Psi_{E=0} |\, q\big(ip + W'(q)\big) \,| \Psi_{E=0} \rangle. \tag{7.97}$$

これは，グラスマン数からなる量 $\eta\eta^\dagger$ と，ボース的変数からなる量 $-q\,\big(ip + W'(q)\big)$ の（状態 $\Psi_{E=0}$ に対する）期待値が厳密に等しいことを意味している．このように，異なる演算子の期待値が等しい値をもつ場合は，何らかの対称性が背後に隠れていると考えるのが自然だ．

7.12.2　一般のエネルギー固有状態に対するワード–高橋関係式

7.12.1 節は，ゼロエネルギー状態に議論を限ったが，任意のエネルギー固有状態に対しても同様の関係式を導くことができる．そのためには，エネルギー E と $(-1)^{\hat{F}} = \pm 1$ の同時固有状態 $\Psi_{E,\pm}$ を考えるとよい．このとき，$\Psi_{E,\pm}$ は，第 4 章で示したように，

$$\mathcal{Q}^\dagger \Psi_{E,+} = \mathcal{Q}\Psi_{E,-} = 0\,, \tag{7.98}$$

を満たし，次の超対称性関係でお互い結びつく．

$$\mathcal{Q}\Psi_{E,+} = \sqrt{E}\,\Psi_{E,-}\,, \qquad \mathcal{Q}^\dagger \Psi_{E,-} = \sqrt{E}\,\Psi_{E,+}\,. \tag{7.99}$$

これらの性質をもちいて 7.12.1 節の議論を繰り返せば，任意のエネルギー固有状態 $\Psi_{E,\pm}$ に対するワード–高橋関係式を導くことができる．ここでは，例として，任意のボース的演算子 X_B に対するワード–高橋関係式を導いておく．

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_{E,-} |\, \bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X_B \,| \Psi_{E,+} \rangle \\ &= \frac{\sqrt{E}}{i\sqrt{\hbar}} \big(\langle \Psi_{E,+} |\, X_B \,| \Psi_{E,+} \rangle - \langle \Psi_{E,-} |\, X_B \,| \Psi_{E,-} \rangle \big)\,, \end{aligned} \tag{7.100a}$$

$$\langle \Psi_{E,+} |\, \bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X_B \,| \Psi_{E,-} \rangle = 0\,. \tag{7.100b}$$

≪ (7.100) 式の証明 ≫

X_B をボース的演算子とする．そのとき，$\bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X_B$ は $\frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\mathcal{Q}$ と X_B との交換関係で与えられる．なぜなら，$\bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X_B$ の定義から

$$\varepsilon^\dagger \bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X_B = \frac{1}{i\hbar}\,[\sqrt{\hbar}\varepsilon^\dagger \mathcal{Q}\,,\, X_B] \implies \bar{\delta}_{\mathcal{Q}} X_B = \frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\,[\mathcal{Q}\,,\, X_B]\,, \tag{7.101}$$

だからである．ここで，$\varepsilon^\dagger$ と X_B が可換であることをもちいた．まず，(7.100a) 式から証明しておこう．

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi_{E,-}|\,\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_B\,|\Psi_{E,+}\rangle &\overset{(7.101)}{=} \langle \Psi_{E,-}|\,\frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\,[\,\mathcal{Q}\,,\,X_B\,]\,|\Psi_{E,+}\rangle \\
&= \frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\Big(\langle \Psi_{E,-}|\,\mathcal{Q}\,X_B\,|\Psi_{E,+}\rangle - \langle \Psi_{E,-}|\,X_B\,\mathcal{Q}\,|\Psi_{E,+}\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\Big(\langle \mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,-}|\,X_B\,|\Psi_{E,+}\rangle - \langle \Psi_{E,-}|\,X_B\,|\mathcal{Q}\Psi_{E,+}\rangle\Big) \\
&\overset{(7.99)}{=} \frac{\sqrt{E}}{i\sqrt{\hbar}}\Big(\langle \Psi_{E,+}|\,X_B\,|\Psi_{E,+}\rangle - \langle \Psi_{E,-}|\,X_B\,|\Psi_{E,-}\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

次に，(7.100b) 式を証明する．

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi_{E,+}|\,\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_B\,|\Psi_{E,-}\rangle &= \langle \Psi_{E,+}|\,\frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\,[\,\mathcal{Q}\,,\,X_B\,]\,|\Psi_{E,-}\rangle \\
&= \frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\Big(\langle \Psi_{E,+}|\,\mathcal{Q}\,X_B\,|\Psi_{E,-}\rangle - \langle \Psi_{E,+}|\,X_B\,\mathcal{Q}\,|\Psi_{E,-}\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\Big(\langle \mathcal{Q}^\dagger\Psi_{E,+}|\,X_B\,|\Psi_{E,-}\rangle - \langle \Psi_{E,+}|\,X_B\,|\mathcal{Q}\Psi_{E,-}\rangle\Big) \\
&\overset{(7.98)}{=} 0\,.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

演習問題 7.12 X_F をフェルミ的演算子とする．そのとき，$\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_F = \frac{1}{i\sqrt{\hbar}}\{\mathcal{Q}, X_F\}$ で与えられる．この関係を使って，$\langle \Psi_{E,\pm}|\,\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_F\,|\Psi_{E,\pm}\rangle$ に対するワード–高橋関係式を導け．

■ コメント ■

- ボース（フェルミ）的演算子 $X_B\,(X_F)$ は $(-1)^{\hat F}$ の固有値の符号を変えない（変える）ので，一般に $\langle \Psi_{E,\pm}|\,X_B\,|\Psi_{E,\mp}\rangle = 0 = \langle \Psi_{E,\pm}|\,X_F\,|\Psi_{E,\pm}\rangle$ である．$\bar\delta_{\mathcal{Q}}$ はフェルミ的演算子なので，$\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_F\,(\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_B)$ はボース的（フェルミ的）演算子である．したがって，$\langle \Psi_{E,\pm}|\,\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_F\,|\Psi_{E,\mp}\rangle = 0 = \langle \Psi_{E,\pm}|\,\bar\delta_{\mathcal{Q}}X_B\,|\Psi_{E,\pm}\rangle$ となる．
- ワード–高橋関係式は，Q を保存電荷として

  $$\langle \Psi|\,[Q, X]\,|\Psi'\rangle$$

  のタイプの期待値を **2 通りの方法で計算する**ことによって一般的に導かれる[*29]．

  $$\langle \Psi|\delta_Q X|\Psi'\rangle = \langle Q^\dagger\Psi|X|\Psi'\rangle - \langle \Psi|X|Q\Psi'\rangle\,.$$

  左辺は無限小変換の生成子 Q による X の変換とみなすことができ，右辺は状態 Ψ, Ψ' に対する変換とみなされる．

■

7.13 ニコライ変換

この節では，第 3 の量子化法と呼ばれるファインマンの**経路積分表示 (path**

*29) この式で，比例係数や統計性からくる ± の符号は本質的ではないので無視している．

integral representation) に基づいて超対称量子力学模型の性質を議論する．まだ，経路積分を学んでいない場合は，(その導出は認めて）経路積分表示から出発して，それの持つ性質を学ぶというスタンスで読んでもらうといいだろう．ここで紹介する性質は，経路積分表示で初めて明瞭にみえてくるもので，経路積分の有用性を示すよい例となっている*30)．これから，まず初めにウィッテン指数を経路積分表示で表した後で，ニコライ変換のもつ性質を紹介する．経路積分表示について詳しく知りたい読者は，ファインマン自身による教科書 [19]，あるいは，文献 [20] あたりが参考になるだろう．

7.13.1 ウィッテン指数の経路積分表示

ウィッテン指数 Δ_W は $E = 0$ で $(-1)^{\hat{F}} = +1$ をもつ状態数 $\mathcal{N}^+_{E=0}$ から，$E = 0$ で $(-1)^{\hat{F}} = -1$ をもつ状態数 $\mathcal{N}^-_{E=0}$ を引いたものとして定義されていた．

$$\Delta_W = \mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}\,. \tag{7.102}$$

Δ_W は位相不変量であり，超対称性の破れの指標となる重要な量であった．ウィッテン指数の経路積分表示を求めるために，まず，Δ_W が次のように書き表せることを示そう．

$$\Delta_W = \mathrm{Tr}\left[\, e^{-\beta H}(-1)^{\hat{F}} \,\right]. \tag{7.103}$$

ここで，β は任意の実数である．この表式は (7.102) 式の定義よりも実際の計算に便利なことが多い．上式で $\mathrm{Tr}[\mathcal{O}]$ は（任意の）完全系を張る状態で $\mathcal{O}$ を挟んで和を取ることを意味する．完全系としては何をとってもよいが，(7.102) 式と (7.103) 式の等価性を示すには，ハミルトニアン H と $(-1)^{\hat{F}}$ の同時固有状態 $\Psi_{E,\lambda}$ に取ると便利である．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\, e^{-\beta H}(-1)^{\hat{F}} \,\right] &= \sum_{E\geq 0}\sum_{\lambda=\pm 1} \langle \Psi_{E,\lambda}|\, e^{-\beta H}(-1)^{\hat{F}}\, |\Psi_{E,\lambda}\rangle \\ &= \sum_{E\geq 0}\sum_{\lambda=\pm 1} e^{-\beta E}\, \lambda\, \langle \Psi_{E,\lambda}|\Psi_{E,\lambda}\rangle\,.\end{aligned}$$

超対称性の性質から，$E > 0$ の状態は，$(-1)^{\hat{F}} = +1$ と $(-1)^{\hat{F}} = -1$ をもつ状態の間で必ず縮退を起こしているので，$E > 0$ の和は $(-1)^{\hat{F}} = +1$ と $(-1)^{\hat{F}} = -1$ の間で相殺が起こり，結局 $E = 0$ の和のみが残る．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[\, e^{-\beta H}(-1)^{\hat{F}} \,\right] \\ &= \sum_{E=0}\sum_{\lambda=\pm 1} \lambda\, \underbrace{\langle \Psi_{E,\lambda}|\Psi_{E,\lambda}\rangle}_{=1} + \sum_{E>0} e^{-\beta E} \underbrace{\Big(\langle \Psi_{E,+}|\Psi_{E,+}\rangle - \langle \Psi_{E,-}|\Psi_{E,-}\rangle\Big)}_{=0}\end{aligned}$$

*30) 場の量子論では，ハミルトニアンを基礎においた演算子形式よりも，ラグランジアン（より正確には作用積分）に基づく経路積分表示での解析のほうが主流となっている．

$$
\begin{aligned}
&= (E=0\ かつ\ \lambda=+1\ の状態数) - (E=0\ かつ\ \lambda=-1\ の状態数) \\
&= \mathcal{N}^{+}_{E=0} - \mathcal{N}^{-}_{E=0}\,. \qquad (7.104)
\end{aligned}
$$

上の証明からわかるように，(7.103) 式に現れる定数 β に Δ_W はよらない．これは，Δ_W のもつ位相不変性の反映である．

それでは，ウィッテン指数の表式 (7.103) に戻ろう．読者の皆さんは，(7.103) 式の右辺で，$\beta = 1/(k_B T)$（T は温度，k_B はボルツマン定数）とおき，$(-1)^{\hat{F}}$ の因子を無視すれば，統計力学における有限温度の分配関数そのものであることに気が付いたであろうか．$(-1)^{\hat{F}}$ の役割は，経路積分表示に移ったときに，フェルミ的変数に対して温度方向の境界条件を反周期的から周期的境界条件に変えることである[18]．したがって，ウィッテン指数の場合は $(-1)^{\hat{F}}$ の因子があるため，フェルミ的変数にもボース的変数と同じ周期的境界条件を課すことになる．これは，超対称性がホーズ的変数とフェルミ的変数の間の対称性なので，必然的に両方の変数に同じ（周期的）境界条件が課されたと理解してもよい．上で述べた境界条件についてのコメントは，特にこれからの議論に重要ではないので，わからなくても気にする必要はない*31)．必要なことは，超対称性を保つようにボース的変数とフェルミ的変数の境界条件が選ばれているという事実のみである．

(7.102) 式と (7.103) 式の等価性の証明では，Tr 計算にエネルギーの完全系をもちいた．エネルギーの完全系の代わりに，座標と共役運動量の完全系をもちいて (7.103) 式を計算したものが経路積分表示と呼ばれるものである*32)．

$$
\Delta_W = \mathrm{Tr}\big[\, e^{-\beta H}(-1)^{\hat{F}}\big] = \int [dq d\eta d\eta^\dagger]\ \exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\ \bar{L}_E(q,\eta,\eta^\dagger)\Big\}. \quad (7.105)
$$

ここで，$\bar{L}_E$ は**ユークリッドラグランジアン (Euclidean Lagrangian)** と呼ばれ，**ミンコフスキー時間** t をユークリッド方向に回転させ，**ユークリッド時間** τ に置き換えたものである．経路積分表示 (7.105) の導出を詳しく述べることはできないので，これまでの話がわからなかったとしても，(7.105) 式をとりあえず認めて先に進むことにしよう．そうしたとしても，これから先，大きな障害とはならないはずだ．一番良いのは，ウィッテン指数のことはすっぱり忘れてもらって，(7.105) 式右辺の経路積分表示から出発することだ．そして，この表式がどのような性質をもつのか，これから調べると思ってもらいたい．

7.13.2 ニコライ変換

(7.105) 式のユークリッドラグランジアン $\bar{L}_E$ を求めるために，ミンコフス

*31) 経路積分表示での境界条件については，本書で詳しく説明するスペースがないので，教科書 [5] の第 3 章などを参考にしてほしい．

*32) 右辺の $\int [dq d\eta d\eta^\dagger]$ は汎関数積分と呼ばれるもので通常の積分ではないが，厳密な定義はここでは必要ない．

キー時間 t からユークリッド時間 τ へ次の変換で移ることにする．

$$t \;\rightarrow\; -i\tau\,. \tag{7.106}$$

この変換を**ウィック回転 (Wick rotation)** と呼ぶ*33)．このとき，質量殻上のユークリッドラグランジアン $\bar{L}_E$ は次式で定義される．

$$\begin{aligned}\bar{L}_E \;&\equiv\; -\bar{L}\Big|_{t\to -i\tau}\\ &\overset{(7.29)}{=} \frac{1}{2}\Big(\frac{dq}{d\tau}\Big)^2 + \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 + \eta^\dagger\left(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\right)\eta\,.\end{aligned} \tag{7.107}$$

これで準備が整った．**ニコライ変換 (Nicolai mapping)** [21] とは，ボース的変数間の変数変換のことで，$N=2$ 超対称量子力学模型の場合は次式で与えられる．

$$q(\tau) \;\longrightarrow\; \rho(\tau) \equiv \frac{dq(\tau)}{d\tau} - W'(q(\tau))\,. \tag{7.108}$$

この $q \rightarrow \rho$ への変換の特徴は，次の 2 つの性質を満たすことにある*34)．

(A) $q(\tau) \rightarrow \rho(\tau)$ への変数変換によって，ユークリッド化されたラグランジアンのボース的変数部分 $\bar{L}_B$ は，次のように書き表される．

$$\bar{L}_B = \frac{1}{2}\big(\rho(\tau)\big)^2 + (\tau\text{に関する全微分項})\,. \tag{7.109}$$

(B) $q(\tau) \rightarrow \rho(\tau)$ への変数変換のヤコビアン J の逆数は，経路積分表示でのフェルミ的変数の積分によって得られる行列式 $\det M$ に等しい．すなわち，

$$J^{-1} = \det M\,. \tag{7.110}$$

ここで，J と $\det M$ は次式で定義される．

$$\int [dq] \overset{q\to\rho}{=} \int [d\rho]\,\det\Big[\frac{\partial q}{\partial \rho}\Big] \equiv \int [d\rho]\,J\,, \tag{7.111}$$

$$\int [d\eta d\eta^\dagger]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau \eta^\dagger\,M\,\eta\Big\} \equiv \det M\,. \tag{7.112}$$

≪ (A), (B) の証明 ≫

(A) の性質は次のように確かめられる．

---

*33) ミンコフスキー時空では，“距離” の 2 乗を（光速 $c=1$ の単位系で）$s^2 \equiv -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ で定義する．s^2 を不変にする変換がローレンツ変換である．ウィック回転でユークリッド時間にもっていくと，$s_E^2 \equiv \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2$ となり，τ は空間座標 x, y, z と同じ役割をもち，s_E は 4 次元ユークリッド空間上の距離に対応することがわかる．

*34) ニコライ変換は，$N=2$ 超対称量子力学では (7.108) 式のように局所的な形で具体的に求めることができるが，場の量子論における超対称性理論では一般に非線形でかつ非局所的である．局所的に求まる例は，$N=2$ 超対称量子力学，2 次元 $N=2$ Wess–Zumino 模型，4 次元 $N=1$ Super Yang–Mills 理論など限られている [22], [23]．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho^2 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{dq}{d\tau} - W'(q)\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{dq}{d\tau}\Big)^2 + \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 - W'(q)\,\frac{dq}{d\tau} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\frac{dq}{d\tau}\Big)^2 + \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2}_{\bar{L}_E\text{のボース的変数部分}} - \frac{d}{d\tau}\,W(q)\,. \qquad (7.113)
\end{aligned}
$$

(B) の性質は形式的に次のように示される[*35)]．まず，ヤコビアンの逆数は次のように求まる．

$$
\begin{aligned}
J^{-1} &= \det{}^{-1}\Big(\frac{\partial q(\tau')}{\partial\rho(\tau)}\Big) = \det\Big(\frac{\partial\rho(\tau)}{\partial q(\tau')}\Big) \\
&= \det\Big[\frac{\partial}{\partial q(\tau')}\Big(\frac{dq(\tau)}{d\tau} - W'(q)\Big)\Big] \\
&= \det\Big[\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\,\delta(\tau-\tau')\Big]. \qquad (7.114)
\end{aligned}
$$

ここで，$\partial q(\tau)/\partial q(\tau') = \delta(\tau-\tau')$ をもちいた．一方，フェルミ的変数の行列式は，$\bar{L}_E$ の中のフェルミ的変数部分を取り出して積分したものなので

$$
\begin{aligned}
\det M &= \int[d\eta d\eta^\dagger]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\,\bar{L}_E\big|_{\eta,\eta^\dagger\text{部分}}\Big\} \\
&= \int[d\eta d\eta^\dagger]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\,\eta^\dagger(\tau)\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\,\eta(\tau)\Big\} \\
&= \int[d\eta d\eta^\dagger]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau d\tau'\,\eta^\dagger(\tau)\Big[\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\,\delta(\tau-\tau')\Big]\eta(\tau')\Big\} \\
&= \det\Big[\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\,\delta(\tau-\tau')\Big]. \qquad (7.115)
\end{aligned}
$$

最後の等式では，グラスマン数の積分公式 (7.26) で，$\eta_i^\dagger \leftrightarrow \eta^\dagger(\tau)$，$\eta_j \leftrightarrow \eta(\tau')$，$\sum_{i,j} \leftrightarrow \int d\tau d\tau'$ の対応をもちいた．また，det の中の本質的でないマイナス符号は無視した．これで，(7.110) 式が証明された．Q.E.D.

ニコライ変換の特徴は，経路積分表示 (7.105) に凝縮してみてとれる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\int[dqd\eta d\eta^\dagger]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\,\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{dq}{d\tau}\Big)^2 + \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 + \eta^\dagger\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\eta\Big]\Big\} \\
&\overset{q\to\rho}{=} \int[d\rho d\eta d\eta^\dagger]\,J\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\,\Big[\frac{1}{2}\rho^2 + \eta^\dagger\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\eta\Big]\Big\} \\
&\qquad (\because \tau\text{の全微分項は}\tau\text{積分でゼロになる}) \\
&\overset{\eta,\eta^\dagger\text{積分}}{=} \int[d\rho]\,J\,\det\Big[\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\,\frac{1}{2}\rho^2\Big\} \\
&\overset{(7.110)}{=} \int[d\rho]\,\exp\Big\{-\int_0^\beta d\tau\,\frac{1}{2}\rho^2\Big\}. \qquad (7.116)
\end{aligned}
$$

■ コメント ■

上の式変形のポイントは以下の通りである．最初の等式では，ボース的変数 q を $q \to \rho$ へ変数変換（ニコライ変換）を行っている．その結果，exp の肩の作用積分は ρ に関して 2 次式 ρ^2 の形になっている．こ

---

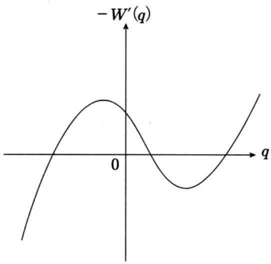
*35) 厳密には，境界条件も含めて行列式やヤコビアンを評価する必要があるが，ここではそれについては触れないので「形式的」証明と書いた．

れがニコライ変換の一つ目の特徴である．また，この変数変換によって積分から $\int[dq] = \int[d\rho]J$ とヤコビアン J が現れる．2番目の等式ではフェルミ的変数 $\eta, \eta^\dagger$ の積分を行うことによって $\det\left[\frac{d}{d\tau} - W''(q)\right]$ の因子が現れる．最後の等式はニコライ変換のもう一つの特徴を表す．ボース的変数の変数変換からくるヤコビ因子 J とフェルミ的変数の積分から来る因子が相殺して，最終的にはガウス積分の形になっている．■

それでは，ニコライ変換の応用として，ニコライ変換をもちいてウィッテン指数を評価してみよう．$q(\tau)$ が τ に関して十分滑らかであるとして，$q \to \pm\infty$ で $|dq/d\tau| < \infty$ としておく．また，$q \to \pm\infty$ で $|W'(q)| \to \infty$ の場合を考えると，ニコライ変換 (7.108) によって定義される新しい変数 $\rho(\tau)$ は漸近的に $W'(q)$ で支配されるだろう．すなわち，

$$\rho \text{ の漸近的振る舞い：} \quad \rho = \frac{dq}{d\tau} - W'(q) \overset{q\to\pm\infty}{\simeq} -W'(q)\,. \tag{7.117}$$

以下で，$W'(q)$ の2つの典型的な場合を例にとって，$q \to \rho$ へのニコライ変換を行って，ウィッテン指数を評価してみる．



(7.105) 式

$\Downarrow$ (7.116) 式

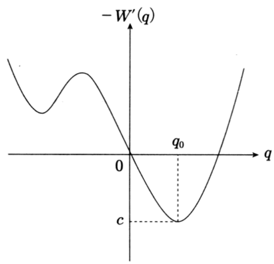
$$\Delta_W = \int [d\rho] \mathrm{e}^{-\int d\tau \frac{1}{2}\rho^2}$$

$\Downarrow$ (7.117) 式

$$q \ : \ -\infty \to +\infty$$
$$\rho \ : \ -\infty \to +\infty$$

$\Downarrow$

$$\Delta_W = \int [d\rho] \mathrm{e}^{-\int d\tau \frac{1}{2}\rho^2} = 1$$



(7.105) 式

$\Downarrow$ (7.116) 式

$$\Delta_W = \int [d\rho] \mathrm{e}^{-\int d\tau \frac{1}{2}\rho^2}$$

$\Downarrow$ (7.117) 式

$$q \ : \ -\infty \to q_0 \to +\infty$$
$$\rho \ : \ +\infty \to c \to +\infty$$

$\Downarrow$

$$\Delta_W = \int [d\rho] \mathrm{e}^{-\int d\tau \frac{1}{2}\rho^2} = 0$$

この結果を理解するためには，少し解説が必要だろう．まず，上の結果は，以前求めた Δ_W の値と矛盾していないことを確認しておこう．左図の超ポテンシャル（の微分）$W'(q)$ の場合は，第 4 章で求めたように[*36]，ゼロエネルギー解 $\psi_{E=0,+}$ が存在し，$\Delta_W = 1$ であった．一方，右図の超ポテンシャルの場合は，第 4 章で求めたように，ゼロエネルギー解は存在せず，$\Delta_W = 0$ であった．確かに，この結果を上の計算は再現している．次に，左図の Δ_W の積分計算では $\int_{-\infty}^{\infty}[d\rho]e^{-\int d\tau \frac{1}{2}\rho^2} = 1$ としたが，もともとのウィッテン指数 Δ_W は整数値をとるので，積分の $\int[d\rho]$ の規格化がこのようになされていると理解しておいてもらいたい．実際には，積分の規格化がどのようになされているかをきちんと確かめておく必要があるのだが，ここではそこまでは追わないことにする．

右図の計算で $\Delta_W = 0$ となった理由は，$q \to \rho$ への変数変換（ニコライ変換）で，変数 ρ の積分路（定義域）が $\rho : +\infty \to c \to +\infty$ と正しくマップしていないことからきている．つまり，$\rho = +\infty$ から $\rho = c$ までの積分 $\int_{+\infty}^{c} d\rho$ と $\rho = c$ から $\rho = +\infty$ までの積分 $\int_{c}^{+\infty} d\rho$ は，お互い積分方向が逆のため $\int_{+\infty}^{c} d\rho + \int_{c}^{+\infty} d\rho = 0$ と相殺するのである．左図の場合での ρ の積分路は，$\rho : -\infty \to +\infty$ となっており，正しく ρ の積分路がとられている．このように，ニコライ変換の立場では，$q \to \rho$ への変換で，**変数の積分路（定義域）がどのようにマップしているかが**，ウィッテン指数と密接に関係していることがわかる．

演習問題 7.13　$N = 2$ 超対称量子力学では，もうひとつ別のニコライ変換が存在する．

$$\tilde{\rho} = \frac{dq}{d\tau} + W'(q)\,.$$

この場合もニコライ変換の満たすべき性質 (A), (B) が成り立っていることを確かめよ．このとき，行列式の次の性質をもちいよ[*37]．

$$\det\Big[\Big(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big)\delta(\tau - \tau')\Big] = \det\Big[\Big(\frac{d}{d\tau} + W''(q)\Big)\delta(\tau - \tau')\Big].$$

---

*36)　第 4 章の図 4.3 では $W'(q)$ ではなく，$W(q)$ の図が書かれていることに注意せよ．

*37)　これは次の関係式から導かれる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\beta} d\tau\, \eta^{\dagger}\Big[\frac{d}{d\tau} - W''(q)\Big]\eta &= \int_0^{\beta} d\tau \Big\{-\frac{d\eta^{\dagger}}{d\tau}\eta - \eta^{\dagger}W''(q)\,\eta\Big\} \\ &= \int_0^{\beta} d\tau\, \eta\Big[\frac{d}{d\tau} + W''(q)\Big]\eta^{\dagger}.\end{aligned}$$

ここで最初の等式では，部分積分を行い，表面項は τ 積分でゼロとなっている．2 番目の等式では，η と $\eta^{\dagger}$ の反可換性をもちいた．後は，積分変数の変換 $\eta \to \eta'^{\dagger}, \eta^{\dagger} \to \eta'$ を行えばよい．

7.13.3　ニコライ変換と超対称性変換

7.13.2 節で $N=2$ 超対称量子力学はニコライ変換をもつことをみた．超対称性の存在はニコライ変換の存在を保証するが[21]，逆にニコライ変換をもつ理論は必ず超対称性をもつのだろうか？　この節では，ニコライ変換は超対称性の役割をどれだけ担っているのかという疑問に答えることにする．

ボース的変数 q_i $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，次のニコライ変換が与えられたとしよう．

$$q_i \quad \longrightarrow \quad \rho_i = \rho_i(q)\,, \qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{7.118}$$

ここでは，ボース的変数は 1 つではなく，より一般の n 個のボース的変数 q_i を含んでいる理論を考えることにする．ρ_i は $\{q_j;\, j=1,2,\cdots,n\}$ の関数である．7.13.2 節での議論を逆にさかのぼると，$q_i \to \rho_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ がニコライ変換とするなら，ユークリッドラグランジアンは（時間の全微分項を除いて）次式で与えられることになる*38)．

$$\bar{L}_E(q_i,\eta_i,\eta_i^\dagger) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,{\rho_i}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i^\dagger\,\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\,\eta_j\,. \tag{7.120}$$

逆に，このように与えられた変換のことをニコライ変換と呼んでもよい．このとき，このラグランジアンは次の（超対称性）変換のもとで不変であることが確かめられる．

$$\begin{cases} \delta_{\varepsilon^\dagger} q_i = -\varepsilon^\dagger \eta_i\,, \\ \delta_{\varepsilon^\dagger} \eta_i = 0\,, \\ \delta_{\varepsilon^\dagger} \eta_i^\dagger = \varepsilon^\dagger \rho_i(q)\,, \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n)\,. \tag{7.121}$$

≪ 変換 (7.121) のもとでの不変性の証明 ≫

$$\begin{aligned}
&\delta_{\varepsilon^\dagger}\bar{L}_E(q_i,\eta_i,\eta_i^\dagger) \\
&= \sum_i \rho_i\,\delta_{\varepsilon^\dagger}\rho_i + \sum_{i,j}\Big\{\delta_{\varepsilon^\dagger}\eta_i^\dagger\,\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\,\eta_j + \eta_i^\dagger\,\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\,\delta_{\varepsilon^\dagger}\eta_j + \eta_i^\dagger\left(\delta_{\varepsilon^\dagger}\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\right)\eta_j\Big\} \\
&= \sum_{i,j}\rho_i\,\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\,(-\varepsilon^\dagger\eta_j) + \sum_{i,j}\Big\{\varepsilon^\dagger\rho_i\,\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\,\eta_j + 0 + \sum_k \eta_i^\dagger\,\frac{\partial^2\rho_i}{\partial q_j\partial q_k}\,(-\varepsilon^\dagger\eta_k)\,\eta_j\Big\} \\
&\qquad\left(\because \delta_{\varepsilon^\dagger}\rho_i = \sum_j \frac{\partial\rho_i}{\partial q_j}\,\delta_{\varepsilon^\dagger}q_j,\quad \delta_{\varepsilon^\dagger}\frac{\partial\rho_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2\rho_i}{\partial q_j\partial q_k}\,\delta_{\varepsilon^\dagger}q_k\right)
\end{aligned}$$

---

*38)　(7.120) 式右辺第 2 項はあえて形式的な書き方をしておいた．下に厳密な定義を与えておくが，くれぐれも厳密さに惑わされることなくアイデアを理解するように心掛けてほしい．(7.120) 式の第 2 項の厳密な定義は，

$$\int d\tau' \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i^\dagger(\tau)\,\frac{\delta\rho_i(\tau)}{\delta q_j(\tau')}\,\eta_j(\tau') \tag{7.119}$$

である．ここで，$\delta\rho_i(\tau)/\delta q_j(\tau')$ は汎関数微分を表し，たとえば，$\delta q_i(\tau)/\delta q_j(\tau') = \delta_{ij}\delta(\tau-\tau')$ で定義されるものである．この定義より，$\rho(\tau)=dq(\tau)/d\tau - W'(q(\tau))$ のとき，$\delta\rho(\tau)/\delta q(\tau') = \big[d/d\tau - W''(q(\tau))\big]\delta(\tau-\tau')$ となる．

$$= -\sum_{i,j,k} \varepsilon^\dagger \eta_i^\dagger \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_j \partial q_k} \eta_j \eta_k \qquad \left(\because \eta_i^\dagger \varepsilon^\dagger = -\varepsilon^\dagger \eta_i^\dagger,\ \eta_k \eta_j = -\eta_j \eta_k\right)$$
$$= 0 .$$

ここで最後の等式では次の性質をもちいた.

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_j \partial q_k} \eta_j \eta_k \overset{j \leftrightarrow k}{=} \sum_{k,j} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_k \partial q_j} \eta_k \eta_j = -\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_j \partial q_k} \eta_j \eta_k .$$

上の 1 番目の等式では，和の添字を $j \to k$ と $k \to j$ と付け替えた．2 番目の等式では，微分の順序は可換 $\partial^2/\partial q_k \partial q_j = \partial^2/\partial q_j \partial q_k$，および，フェルミ的変数の反可換性 $\eta_k \eta_j = -\eta_j \eta_k$ をもちいた．この結果は，

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_j \partial q_k} \eta_j \eta_k = 0$$

を意味する． Q.E.D.

したがって，ニコライ変換 (7.118) と超対称性変換 (7.121) は 1 対 1 対応の関係にあることがわかる．

$$\text{ニコライ変換} \iff \text{超対称性変換} \tag{7.122}$$

これまで調べてきた $N = 2$ 超対称量子力学の場合は，$n = 1$ の 1 変数の場合で，$\rho = \frac{dq}{d\tau} - W'(q)$，および，$\frac{\partial \rho}{\partial q} = \frac{d}{d\tau} - W''(q)$ となり，$\varepsilon^\dagger$ を変換パラメータとする超対称性変換を再現する*39)．ε を変換パラメータとする超対称性変換の不変性は，演習問題 7.13 で示したもう一つのニコライ変換が対応する．このときは，η と $\eta^\dagger$ の役割が入れ替わる．このように，ニコライ変換は，超対称性変換の不変性と同等の情報を担っていることがわかる．

演習問題 7.14　演習問題 7.13 で確かめたように，$N = 2$ 超対称量子力学では，もう一つ別のニコライ変換が存在する．

$$\tilde{\rho} = \frac{dq}{d\tau} + W'(q) .$$

このニコライ変換から定義されるユークリッドラグランジアンを

$$\bar{L}'_E \equiv \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 + \eta \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial q} \eta^\dagger = \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 + \eta \left(\frac{d}{d\tau} + W''(q) \right) \eta^\dagger ,$$

とすると，次の（超対称性）変換

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon q = \varepsilon \eta^\dagger , \\ \delta_\varepsilon \eta = -\varepsilon\, \tilde{\rho}(q) , \\ \delta_\varepsilon \eta^\dagger = 0 , \end{cases}$$

のもとで $\bar{L}'_E$ が不変であることを確かめよ．次に，$\bar{L}'_E$ が τ に関する全微分項

---

*39)　質量殻上の超対称性変換 (7.35) で，$\varepsilon^\dagger$ に比例する項を取り出し，$t \to -i\tau$ と置き換えたものに一致している．

を除いて，

$$\bar{L}_E = \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\big(W'(q)\big)^2 + \eta^\dagger\left(\frac{d}{d\tau} - W''(q)\right)\eta,$$

に等しいこと（$\bar{L}'_E = \bar{L}_E +$ 全微分項）を確かめよ．

最後に，ニコライ変換と超対称性変換との対応についてコメントをして，この章を終えることにする．ニコライ変換から構築されたラグランジアン (7.120) は，グラスマン変数 $\varepsilon^\dagger$ を変換パラメータとする変換 (7.121) の不変性をもっていた．このことは，必ずしも超対称性の存在を意味しない．なぜなら，この変換は 2 度続けて行うとゼロになるベキ零性の性質をもち，この変換のみではハミルトニアンが現れないからである．エネルギーの縮退が起きるためには，第 4 章で議論したように超対称性変換，あるいは，超電荷からハミルトニアンが生成される必要がある．したがって，$N=2$ 超対称量子力学を導くためには，少なくともニコライ変換が 2 種類必要だということになる．とすると，1 種類のニコライ変換しか存在しない場合，グラスマン変数を変換パラメータにもつ対称性は超対称性以外に存在するのかという疑問が湧く．そのような対称性として（少なくとも）よく知られた例が 2 つある．一つはゲージ理論における **BRS 対称性**であり，もう一つは**確率過程量子化 (stochastic quantization)** に現れる対称性だ．BRS 対称性はゲージ理論をローレンツ不変に量子化する際に現れる量子論的対称性でベキ零性をもつ．確率過程量子化は，第 4 の量子化法として知られており，ランダムな力 (random force) を持ち込むことによって，確率解釈が可能となり，量子論を古典論的な枠組みで再定義し直すことができる．この理論にはベキ零性をもつ対称性が隠れていることが知られている．ゲージ理論における BRS 量子化については，第一人者である九後汰一郎の教科書 [3] の解説が一番詳しいだろう．また，確率過程量子化については，次の 2 つの論文 [24], [25] がその先駆けとなる．解説書としては文献 [26] が参考になるだろう．

第 8 章
超空間と超場形式

超対称性理論を構築するための強力な理論体系として，超場形式が知られている．そこでは，時空は超空間へ拡張され，我々が感じ取ることのできる実空間座標にグラスマン座標が加わる．グラスマン空間は長さという概念を持たないため，その物理的意味は未だ不明だ．それにもかかわらず，あまりに美しい数学的構造は我々を魅了して止まない．見せかけだけの美しさなのか，それとも，宇宙の真の構造がその中に隠されているのか，あなたの目で確かめてほしい．

8.1 この章のあらまし

これまでの解析では，ハミルトニアン，あるいは，作用積分を初めに与えて，それらが超対称性をもつことを確かめた．しかし，それでは超対称性をもつ理論を一からどうやって構築すればよいか，謎のままである．そこで，超対称性理論の一般的構成法 ——超場形式—— を紹介することにしよう．

超場形式はまず時間座標 t を超空間座標 $(t, \theta, \theta^\dagger)$ に拡張することから始める．ここで，θ と $\theta^\dagger$ は複素グラスマン座標である．この拡張にともなって，時間 t の変数 $q(t)$ は超空間座標 $(t, \theta, \theta^\dagger)$ に依存する超場 $\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)$ に置き換えられる．このとき，(7.4) 式の作用積分に現れていた 4 つの変数 $q(t), \eta(t), \eta^\dagger(t), F(t)$ は，次のように，1 つの超場 $\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)$ の中にきれいに収まることがわかる．

$$\Phi(t, \theta, \theta^\dagger) = q(t) + \theta\eta^\dagger(t) - \theta^\dagger\eta(t) + \theta\theta^\dagger F(t)\,.$$

ここで，グラスマン数 $\theta, \theta^\dagger$ のもつ反可換性より，$\theta, \theta^\dagger$ に関して上記以外の項は現れないことに注意しておく．この超場と超空間上の積分をもちいると，(7.4) 式の作用積分は次のように書き換えることができる．

$$S \overset{(7.4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + W'(q)F + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\,\eta^\dagger\eta \right\} \qquad (8.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbb{D}^\dagger \varPhi)(\mathbb{D}\varPhi) + W(\varPhi) \right\}. \tag{8.2}$$

ここで，$\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$ は超共変微分と呼ばれ，次式で定義される．

$$\mathbb{D} = -\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger} + i\theta\,\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbb{D}^\dagger = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta^\dagger\,\frac{\partial}{\partial t}.$$

$W(\varPhi)$ が超ポテンシャルと呼ばれる理由も (8.2) 式を見れば納得がいくだろう．より一般の超対称作用積分は，超場 $\varPhi$ と超共変微分 $\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$ から構成される任意関数の超空間積分で与えられる．作用積分に対する表式で，(8.1) 式と (8.2) 式のどちらがより超対称性の本質に近づいているかは言うまでもないだろう．実際，(8.2) 式の作用積分の表式は単なる書き換えではない．超対称性変換 (7.31) に対して,「超空間上の並進」という新しい見方を与えてくれる．すなわち，超対称性は超空間上の並進対称性と等価なのである．

超対称性 = 超空間上の並進対称性

超空間におけるグラスマン座標 $\theta, \theta^\dagger$ の実体は何かという謎は残されたままだが，時間と空間という古い概念に新しい光が差し込んでいるのかもしれない．

8.2 超対称作用積分と超対称性変換

超場形式の一般論へ進む前に，前章のおさらいをしておこう．すでに前章で与えたものだが，これから何度も目にするものなので，読者の便宜のため，ここでもう一度掲載しておこう．超対称作用積分は次式で与えられた．

$$S[q, \eta, \eta^\dagger, F] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + W'(q)F + i\eta^\dagger\dot{\eta} + W''(q)\,\eta^\dagger\eta \right\}. \tag{8.3}$$

ここで $q(t), F(t)$ はボース的実変数，$\eta(t), \eta^\dagger(t)$ はフェルミ的複素変数である．この作用積分の重要な性質の一つは，次の（無限小）超対称性変換のもとでの不変性である．

$$\begin{cases} \delta q = \varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta, \\ \delta\eta = \varepsilon(i\dot{q} + F), \\ \delta\eta^\dagger = \varepsilon^\dagger(-i\dot{q} + F), \\ \delta F = -i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger - i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}. \end{cases} \tag{8.4}$$

8.3 超空間と超空間上の並進

超対称性理論の一般論を展開する際に，**超場形式 (superfield formulation)** は非常に強力な道具を提供してくれる．そのための第 1 ステップとして，まず超空間を導入しよう．

8.3.1　超空間への拡張

超空間 (superspace) は，時間座標 t に加えて，反可換な複素グラスマン数 $\theta, \theta^\dagger$ で張られる空間である*1)．

$$\text{超空間座標: } (\,t, \theta, \theta^\dagger\,)\,. \tag{8.5}$$

$\theta, \theta^\dagger$ はグラスマン数なので，次の性質を満たす．

$$\theta\theta^\dagger = -\theta^\dagger\theta\,, \tag{8.6a}$$

$$\theta^2 = (\theta^\dagger)^2 = 0\,. \tag{8.6b}$$

これは前章でお馴染みの関係であろう．

■ コメント ■

$\theta, \theta^\dagger$ はベキ零性 (8.6b) にしたがうので，グラスマン座標方向は“長さ”という概念を持たない．そのため，実体を伴ったものとして超空間を捉えることは難しい．

■

8.3.2　超空間座標の並進と生成子

次に時間座標の並進（平行移動）の拡張として，超空間座標の（無限小）並進を次式で導入しよう．

$$\begin{cases} t \ \rightarrow \ t + \Delta t \equiv t + i(\varepsilon\theta^\dagger + \varepsilon^\dagger\theta)\,, \\ \theta \ \rightarrow \ \theta + \Delta\theta \equiv \theta + \varepsilon\,, \\ \theta^\dagger \ \rightarrow \ \theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger \equiv \theta^\dagger + \varepsilon^\dagger\,. \end{cases} \tag{8.7}$$

ここで，$\varepsilon, \varepsilon^\dagger$ は無限小グラスマン数で，$\theta, \theta^\dagger$ と同様に反可換である．(通常の数とは可換.）次の 8.4 節で示すように，超対称性変換 (8.4) は，超空間座標の並進 (8.7) として再解釈できる．これが，超空間を導入する理由の一つである．「新しい解釈が可能になったとき，そこに新しい発展が生まれる」という，良い例になっている．

超空間座標の並進 (8.7) は，次の微分演算子 $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^\dagger$

$$\mathbb{Q} \equiv -\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger} - i\theta\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{8.8a}$$

$$\mathbb{Q}^\dagger \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta^\dagger\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{8.8b}$$

によって生成されることがわかる．なぜなら，$\varepsilon\,\mathbb{Q}^\dagger - \varepsilon^\dagger\,\mathbb{Q}$ を指数の肩に上げた微分演算子は，$t, \theta, \theta^\dagger$ の任意関数 $f(t, \theta, \theta^\dagger)$ に作用すると，超空間座標の並進

*1)　4 次元時空 $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$ に対する超空間も似たように $(x^\mu, \theta_\alpha, \theta^\dagger_\alpha)$ と与えられる．ただし，この場合，グラスマン座標 $\theta_\alpha, \theta^\dagger_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ はスピンの指標 α をもつ 2 成分グラスマン数である．

を引き起こすからである．すなわち，

$$e^{(\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q})}f(t,\theta,\theta^\dagger)=f(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,. \tag{8.9}$$

ただし，この等式では無限小グラスマンパラメータ $\varepsilon,\varepsilon^\dagger$ の 1 次までとるものとする．この関係式の意味することが，「$\mathbb{Q},\mathbb{Q}^\dagger$ は超空間座標の並進 (8.7) を引き起こす生成子」であるということである．

≪ (8.9) 式の証明 ≫

(8.9) 式の右辺を $\Delta t,\Delta\theta,\Delta\theta^\dagger$ で展開して，左辺と一致することを以下で示す．

$$\begin{aligned}&f(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\\ &\overset{(7.19)}{=}f(t,\theta,\theta^\dagger)+\Delta t\frac{\partial}{\partial t}f(t,\theta,\theta^\dagger)+\Delta\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(t,\theta,\theta^\dagger)+\Delta\theta^\dagger\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}f(t,\theta,\theta^\dagger)\,.\end{aligned}$$

このとき，右辺で $\Delta\theta,\Delta\theta^\dagger$ と $\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}$ の位置に気を付けよう．それらは $\theta,\theta^\dagger$ と同じくグラスマン的な量なので，勝手な場所に置くことはできない．次に $\Delta t,\Delta\theta,\Delta\theta^\dagger$ の定義式 (8.7) を上式に代入して，

$$\begin{aligned}&f(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\\ &\overset{(8.7)}{=}\left[1+i(\varepsilon\theta^\dagger+\varepsilon^\dagger\theta)\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon^\dagger\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\right]f(t,\theta,\theta^\dagger)\\ &=\left[1+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\theta^\dagger\frac{\partial}{\partial t}\right)-\varepsilon^\dagger\left(-\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}-i\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]f(t,\theta,\theta^\dagger)\\ &\overset{(8.8)}{=}\left[1+\left(\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q}\right)\right]f(t,\theta,\theta^\dagger)\\ &\simeq e^{\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q}}f(t,\theta,\theta^\dagger)\,.\end{aligned}$$

Q.E.D.

微分演算子 $\mathbb{Q},\mathbb{Q}^\dagger$ は次の関係も満たす．

$$\{\,\mathbb{Q}^\dagger\,,\,\mathbb{Q}\,\}=-2i\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{8.10a}$$

$$\mathbb{Q}^2=(\mathbb{Q}^\dagger)^2=0\,. \tag{8.10b}$$

これらの関係式は前章で導いた (7.34) 式を思い出させる．(7.34) 式での $\delta_{\mathcal{Q}},\delta_{\mathcal{Q}^\dagger}$ は超対称変換そのものと考えてよいので，$\mathbb{Q},\mathbb{Q}^\dagger$ で生成される超空間座標の並進は，超対称性変換と密接に関係していることが強く示唆される．この予想は正しく，次の節で超対称性変換 (8.4) は超空間での座標並進とみなせることを証明する．

≪ (8.10) 式の証明 ≫

ここでの計算に慣れていなければ，両辺に任意の関数 $f(t,\theta,\theta^\dagger)$ をかけて確かめるとよい．注意するのは次のような計算だ．

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\frac{\partial}{\partial\theta}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger},\qquad\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}=0\,,$$

$$\theta\theta^\dagger=-\theta^\dagger\theta,\qquad\theta^2=(\theta^\dagger)^2=0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\left(\theta^\dagger f(t,\theta,\theta^\dagger)\right)=f(t,\theta,\theta^\dagger)-\theta^\dagger\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}f(t,\theta,\theta^\dagger)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\theta f(t,\theta,\theta^\dagger)\big) = f(t,\theta,\theta^\dagger) - \theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(t,\theta,\theta^\dagger),$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\big(\theta f(t,\theta,\theta^\dagger)\big) = -\theta\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}f(t,\theta,\theta^\dagger),$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\theta^\dagger f(t,\theta,\theta^\dagger)\big) = -\theta^\dagger\frac{\partial}{\partial\theta}f(t,\theta,\theta^\dagger).$$

グラスマン数やその微分に関して順番が明確にわかるように書くことが，計算間違いを減らすためのテクニックである．上の計算をもちいれば，次式を確かめることは容易いだろう．

$$\{\mathbb{Q}^\dagger\,,\,\mathbb{Q}\}f(t,\theta,\theta^\dagger) = -2i\frac{\partial}{\partial t}f(t,\theta,\theta^\dagger),$$
$$\mathbb{Q}^2 f(t,\theta,\theta^\dagger) = (\mathbb{Q}^\dagger)^2 f(t,\theta,\theta^\dagger) = 0.$$

Q.E.D.

8.4 超場と超対称性変換

8.4.1 超場の導入

時間 t は超空間 $(t,\theta,\theta^\dagger)$ に拡張されたので，t の関数であったボース的変数 $q(t)$ は $(t,\theta,\theta^\dagger)$ の関数である**超場 (superfield)**

$$q(t) \;\to\; \varPhi(t,\theta,\theta^\dagger) \tag{8.11}$$

に置き換えられる．このとき，$\varPhi$ は q と同じく実（エルミート）とする．

$$\varPhi^\dagger(t,\theta,\theta^\dagger) = \varPhi(t,\theta,\theta^\dagger). \tag{8.12}$$

超場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ を θ と $\theta^\dagger$ で展開すると，$\theta^2 = (\theta^\dagger)^2 = 0$ および $\theta\theta^\dagger = -\theta^\dagger\theta$ の性質より，θ と $\theta^\dagger$ の有限次でベキ展開は止まる．

$$\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger) = q(t) + \theta\eta^\dagger(t) - \theta^\dagger\eta(t) + \theta\theta^\dagger F(t). \tag{8.13}$$

各展開係数 $q(t), \eta^\dagger(t), \eta(t), F(t)$ は，超対称作用積分 (8.3) に現れている変数にそれぞれ対応する．次節でこの対応を具体的に確かめることにする．

■ コメント ■

超場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ に関する注意点をいくつかコメントしておく．

- グラスマン数の性質より，$\theta,\theta^\dagger$ の高次項は現れない．たとえば，$\theta\theta^\dagger\theta$ 項は，$\theta\theta^\dagger\theta = -\theta\theta\theta^\dagger = 0$ となり，恒等的にゼロとなる．このことからわかるように n 個のグラスマン数 θ_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ のベキ展開は有限次の項で必ずとまり，最高ベキは $\theta_1\theta_2\cdots\theta_n$ である．(ここで θ_i の順番は重要ではない.)
- グラスマン数 θ_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ の積に対するエルミート共役（ここでは複素共役と区別をしていない）は次式で定義される．

$$(\theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_k})^\dagger = \theta_{i_k}^\dagger\cdots\theta_{i_2}^\dagger\theta_{i_1}^\dagger. \tag{8.14}$$

この定義から，次の関係が得られる．

$$(\theta\eta^\dagger)^\dagger = (\eta^\dagger)^\dagger\theta^\dagger = \eta\theta^\dagger = -\theta^\dagger\eta\,,$$
$$(\theta^\dagger\eta)^\dagger = (\eta)^\dagger(\theta^\dagger)^\dagger = \eta^\dagger\theta = -\theta\eta^\dagger\,,$$
$$(\theta\theta^\dagger)^\dagger = (\theta^\dagger)^\dagger\theta^\dagger = \theta\theta^\dagger\,.$$

このことから，なぜ実場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ の展開式 (8.13) の中で右辺第 3 項の符号がマイナスなのか理解できる．なぜなら，$\theta\eta^\dagger - \theta^\dagger\eta$ の組み合わせがエルミートだからである．また，$\theta\theta^\dagger$ はエルミートなので，F は実（エルミート）でなければならない．すなわち，

$$F^\dagger(t) = F(t)\,. \tag{8.15}$$

- $q(t)$ はボース的変数なので，$\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ もボース的変数でなければならない．2 つのグラスマン数の積はボース的変数であることに注意すると，

$$q(t), F(t)\text{: ボース的変数},$$
$$\eta(t), \eta^\dagger(t)\text{: フェルミ的変数}$$

でなければならないことがわかる．
- 前章の解析から，$F(t)$ は運動方程式に $\dot{F}(t)$ や $\ddot{F}(t)$ が含まれておらず補助場としての役割しか持っていないので，$F(t)$ の運動方程式を使って作用積分から $F(t)$ を消去することができた．そのため，なぜ，消去可能な補助場 $F(t)$ を作用積分にわざわざ持ち込んだのか，不思議に思ったかもしれない．しかしながら，展開式 (8.13) からわかるように，**超場 $\boldsymbol{\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)}$ の観点からは必然的に補助場 $\boldsymbol{F(t)}$ が導入される**ことがわかる．
- ここでは，$\varPhi(t,\theta=0,\theta^\dagger=0) = q(t)$ となるようにボース的超場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ を導入したが，(物理的意味づけは別にして）フェルミ的超場 Ξ を導入することもできる．

$$\Xi(t,\theta,\theta^\dagger) = \xi(t) + \theta f(t) + \theta^\dagger g(t) + \theta\theta^\dagger\rho(t)\,.$$

このとき，$\xi(t)$ と $\rho(t)$ がフェルミ的変数，$f(t), g(t)$ がボース的変数となる．ここでは，この可能性についてはこれ以上追求しないことにする．
- $q(t), \eta(t), \eta^\dagger(t), F(t)$ を超場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ の**成分場 (component field)** と呼ぶ．
- $\theta\theta^\dagger$ に比例する項を **$\boldsymbol{F}$ 項 ($\boldsymbol{F}$ term)** と呼ぶ．超対称性をもつ一般的な作用積分を構築する際に，重要となる項である (8.5 節参照)．

---■

超場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ の展開式 (8.13) は，$\theta, \theta^\dagger$ でのベキ展開の各係数を $q(t), \eta^\dagger(t), \eta(t), F(t)$ と定義したとみなすことができる．逆に，それらの変数を元の超場 $\varPhi(t,\theta,\theta^\dagger)$ から導くには，(8.13) 式の右辺の展開式を考慮すれば，

$$q(t) = \Phi(t, \theta, \theta^\dagger)\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0}, \tag{8.16a}$$

$$\eta^\dagger(t) = \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0}, \tag{8.16b}$$

$$\eta(t) = -\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0}, \tag{8.16c}$$

$$F(t) = \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0}, \tag{8.16d}$$

として求まることがわかる．ここで，$\eta(t)$ を得る際にマイナス符号が必要なこと，$F(t)$ を得る際の θ と $\theta^\dagger$ の微分の順序には，注意が必要である．

8.4.2 超対称性変換と超空間上の並進変換

さて，超空間と超場が導入できたので，いよいよ,「**超対称性変換 (8.4) は超空間座標の並進変換とみなせる**」ことを以下で示そう．これから示すことは，次の関係式である．

$$\delta\Phi(t, \theta, \theta^\dagger) = \Phi(t + \Delta t, \theta + \Delta\theta, \theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger) - \Phi(t, \theta, \theta^\dagger). \tag{8.17}$$

ここで，左辺の $\delta\Phi$ は超対称性変換 (8.4) を超場 Φ に作用させたものである．すなわち，

$$\delta\Phi(t, \theta, \theta^\dagger) \equiv \delta q(t) + \theta\delta\eta^\dagger(t) - \theta^\dagger\delta\eta(t) + \theta\theta^\dagger\,\delta F(t). \tag{8.18}$$

一方，(8.17) 式右辺は，超空間上の無限小並進 (8.7) で与えられるものである．したがって，(8.17) 式の等式は，超対称性変換 (8.4) が超空間上の並進変換 (8.7) として再解釈できることを意味している．

超対称性変換と超空間上の並進変換

超対称性変換 ⟺ 超空間上の並進変換

$$\begin{cases} \delta q = \varepsilon\eta^\dagger - \varepsilon^\dagger\eta, \\ \delta\eta = \varepsilon(i\dot{q} + F), \\ \delta\eta^\dagger = \varepsilon^\dagger(-i\dot{q} + F), \\ \delta F = -i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger - i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}. \end{cases} \iff \begin{cases} t \;\to\; t + \Delta t \equiv t + i(\varepsilon\theta^\dagger + \varepsilon^\dagger\theta), \\ \theta \;\to\; \theta + \Delta\theta \equiv \theta + \varepsilon, \\ \theta^\dagger \;\to\; \theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger \equiv \theta^\dagger + \varepsilon^\dagger. \end{cases} \tag{8.19}$$

≪ (8.17) 式の証明 ≫

$$\begin{aligned}
&\Phi(t + \Delta t, \theta + \Delta\theta, \theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger) - \Phi(t, \theta, \theta^\dagger) \\
&\overset{(8.13)}{=} q(t + \Delta t) + (\theta + \Delta\theta)\eta^\dagger(t + \Delta t) - (\theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger)\eta(t + \Delta t) \\
&\qquad +(\theta + \Delta\theta)(\theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger)\,F(t + \Delta t) - \Phi(t, \theta, \theta^\dagger) \\
&= \Delta t\,\dot{q}(t) + \Delta\theta\,\eta^\dagger(t) + \theta\Delta t\,\dot{\eta}^\dagger(t) - \Delta\theta^\dagger\eta(t) - \theta^\dagger\Delta t\,\dot{\eta}(t) \\
&\qquad +\Delta\theta\,\theta^\dagger F(t) + \theta\,\Delta\theta^\dagger F(t) + \theta\theta^\dagger\Delta t\,\dot{F}(t) \\
&\overset{(8.7)}{=} \big(\varepsilon\eta^\dagger(t) - \varepsilon^\dagger\eta(t)\big) + \theta\big(-i\varepsilon^\dagger\dot{q}(t) + \varepsilon^\dagger F(t)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\theta^\dagger\big(i\varepsilon\dot{q}(t)+\varepsilon F(t)\big)+\theta\theta^\dagger\big(-i\varepsilon\dot{\eta}^\dagger(t)-i\varepsilon^\dagger\dot{\eta}(t)\big)\\
\overset{(8.4)}{=}\;&\delta q(t)+\theta\delta\eta^\dagger(t)-\theta^\dagger\delta\,\eta(t)+\theta\theta^\dagger\,\delta F(t)\\
\overset{(8.18)}{=}\;&\delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\,.
\end{aligned}
$$

上の式変形では，グラスマン数の反可換性とベキ零性，および，$f(t+\Delta t)\simeq f(t)+\Delta t\dot{f}(t)$ を使った．3 番目の等式では，(8.7) 式を代入した後で $\theta,\theta^\dagger$ に関して整理し直した．また，無限小量の 2 次以上の項も落とした． Q.E.D.

8.4.3 一般の超場の変換性

超場に対する超対称性変換と超空間上の並進変換の間の関係 (8.19) は，超場 $\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)$ の任意関数 $\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))$ に対する超対称性変換の導出を容易にしてくれる．$\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))$ を $\theta,\theta^\dagger$ で展開して，それぞれの係数を

$$\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))=\mathcal{F}_q(t)+\theta\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t)-\theta^\dagger\mathcal{F}_\eta(t)+\theta\theta^\dagger\,\mathcal{F}_F(t)\,, \tag{8.20}$$

と定義しておく．このとき，右辺の成分場の超対称性変換は次式で与えられることがわかる．

$$\delta\mathcal{F}_q(t)=\varepsilon\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t)-\varepsilon^\dagger\mathcal{F}_\eta(t)\,, \tag{8.21a}$$

$$\delta\mathcal{F}_\eta(t)=\varepsilon(i\dot{\mathcal{F}}_q(t)+\mathcal{F}_F(t))\,, \tag{8.21b}$$

$$\delta\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t)=\varepsilon^\dagger(-i\dot{\mathcal{F}}_q(t)+\mathcal{F}_F(t))\,, \tag{8.21c}$$

$$\delta\mathcal{F}_F(t)=-i\varepsilon\dot{\mathcal{F}}^\dagger_{\eta^\dagger}(t)-i\varepsilon^\dagger\dot{\mathcal{F}}_\eta(t)\,. \tag{8.21d}$$

■ コメント ■

- この結果は，超場の成分場に対する超対称性変換 (8.4) の素直な拡張になっている．
- (8.21) 式で特に，$\delta\mathcal{F}_F(t)$ が全時間微分項 $\frac{d}{dt}\big[-i\varepsilon\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t)-i\varepsilon^\dagger\mathcal{F}_\eta(t)\big]$ で与えられるという事実は重要である．この性質は，次節で超対称性をもつ作用積分の一般構成のときに鍵となる．

■

演習問題 8.1 (8.21) 式を証明せよ．

ヒント： (8.21) 式の左辺は，$\delta\mathcal{F}(\Phi)\equiv\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)+\delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))-\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))$ から定義される．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\delta\mathcal{F}_q(t)+\theta\delta\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t)-\theta^\dagger\delta\mathcal{F}_\eta(t)+\theta\theta^\dagger\,\delta\mathcal{F}_F(t)\\
\equiv\;&\delta\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))\\
=\;&\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)+\delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))-\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))\\
\overset{(8.17)}{=}\;&\mathcal{F}(\Phi(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger))-\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))\\
\overset{(8.20)}{=}\;&\big[\mathcal{F}_q(t+\Delta t)+(\theta+\Delta\theta)\,\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t+\Delta t)-(\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,\mathcal{F}_\eta(t+\Delta t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\theta + \Delta\theta)(\theta^\dagger + \Delta\theta^\dagger)\,\mathcal{F}_F(t + \Delta t)\,\big] \\
&- \big[\,\mathcal{F}_q(t) + \theta\mathcal{F}^\dagger_{\eta^\dagger}(t) - \theta^\dagger\mathcal{F}_\eta(t) + \theta\theta^\dagger\,\mathcal{F}_F(t)\,\big]\,.
\end{aligned}
$$

この右辺を (8.17) 式の証明のときと同じように計算すれば，(8.21) 式が導ける．

8.4.4 超共変微分

最後にもう一つだけ準備が必要である．作用積分の運動項（変数の時間微分項）を得るためには，次の**超共変微分 (supercovariant derivative)** が必要である．

$$
\mathbb{D} \equiv -\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger} + i\theta\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{8.22a}
$$

$$
\mathbb{D}^\dagger \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta^\dagger\,\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{8.22b}
$$

超共変微分演算子 $\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$ の重要な性質は，$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^\dagger$ との反可換性である．すなわち，

$$
\{\,\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{D}\,\} = \{\,\mathbb{Q}^\dagger\,,\,\mathbb{D}\,\} = 0\,, \tag{8.23a}
$$

$$
\{\,\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{D}^\dagger\,\} = \{\,\mathbb{Q}^\dagger\,,\,\mathbb{D}^\dagger\,\} = 0\,. \tag{8.23b}
$$

また，$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^\dagger$ と同様な関係

$$
\{\,\mathbb{D}^\dagger\,,\,\mathbb{D}\,\} = +2i\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{8.24a}
$$

$$
\mathbb{D}^2 = (\mathbb{D}^\dagger)^2 = 0\,, \tag{8.24b}
$$

を $\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$ も満たす．

演習問題 8.2　(8.23) 式と (8.24) 式を確かめよ．

8.5 超対称作用積分の一般的構成（その 1）

準備はすべて整った．この節（と次節）で超対称性をもつ作用積分の一般的構成法を紹介することにしよう．そのためのヒントは，すでに前節の (8.21) 式下のコメントに与えられている．ラグランジアンとして，超場 $\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)$（と超共変微分 $\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$）からなる任意の関数の F 項（$= \theta\theta^\dagger$ に比例する項）にとれば，自動的に超対称性変換のもとで不変な作用積分が得られる．なぜなら，(8.21d) 式から **F 項の超対称性変換は時間の全微分で与えられる**ので，F 項を時間で積分した作用積分は不変となるからである．実際，この章の最初に与えられた超対称作用積分 (8.3) は，超場 $\Phi(t, \theta, \theta^\dagger)$ から次のようにして導かれたものである．

超対称作用積分の一般的構成法（その 1）

$$
\begin{aligned}
S[\Phi] &= S[q,\eta,\eta^\dagger,F] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\left\{-\frac{1}{2}(\mathbb{D}^\dagger\Phi)(\mathbb{D}\Phi)+W(\Phi)\right\}\Big|_{\theta\theta^\dagger\text{項}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}F^2+W'(q)F+i\eta^\dagger\dot{\eta}+W''(q)\,\eta^\dagger\eta\right\}. \quad (8.25)
\end{aligned}
$$

ここで，$\big|_{\theta\theta^\dagger\text{項}}$ は展開項の中で $\theta\theta^\dagger$ に比例する係数を取り出すことを意味する．ただし，(8.25) 式の最後の等式で，$\int dt\frac{i}{2}(\eta^\dagger\dot{\eta}-\dot{\eta}^\dagger\eta)=\int dt\big\{i\eta^\dagger\dot{\eta}+\frac{d}{dt}(-\frac{i}{2}\eta^\dagger\eta)\big\}$ として全時間微分項 $\int dt\frac{d}{dt}(-\frac{i}{2}\eta^\dagger\eta)$ を落とした．

≪ (8.25) 式の証明 ≫

(8.25) 式は，次の公式から直接導かれる．

$$
-\frac{1}{2}(\mathbb{D}^\dagger\Phi)(\mathbb{D}\Phi)=\cdots+\theta\theta^\dagger\Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{i}{2}(\eta^\dagger\dot{\eta}-\dot{\eta}^\dagger\eta)+\frac{1}{2}F^2\Big), \qquad (8.26)
$$

$$
W(\Phi)=\cdots+\theta\theta^\dagger\Big(W'(q)F+W''(q)\eta^\dagger\eta\Big). \qquad (8.27)
$$

上式右辺ではこれからの計算に必要な $\theta\theta^\dagger$ に比例する項のみを表示している．(8.26) 式を導くためには，Φ の展開式 (8.13) と超共変微分の定義式 (8.22) から，まず，

$$
\mathbb{D}\Phi=\eta+\theta(i\dot{q}+F)+\theta\theta^\dagger(-i\dot{\eta}),
$$

$$
\mathbb{D}^\dagger\Phi=\eta^\dagger-\theta^\dagger(i\dot{q}-F)+\theta\theta^\dagger(+i\dot{\eta}^\dagger),
$$

を導き，続いてその積を取ればよい．
(8.27) 式の証明は，$W(\Phi)\equiv\cdots+\theta\theta^\dagger\,W_F(t)$ とおいて，

$$
\begin{aligned}
W_F(t) &= \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\frac{\partial}{\partial\theta}W(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger))\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\left\{\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\Big)\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi}\right\}\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0} \\
&= \left\{\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\Big)\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi}\right. \\
&\qquad \left.-\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\Big)\frac{\partial^2 W(\Phi)}{\partial\Phi^2}\right\}\Big|_{\theta=\theta^\dagger=0} \\
&= F\,W'(q)+\eta^\dagger\eta\,W''(q).
\end{aligned}
$$

として求まる．ここでは，合成関数の微分の公式 $\frac{\partial}{\partial\theta}W(\Phi(\theta))=\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(\theta)\Big)\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi}$ および $\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)|_{\theta=\theta^\dagger=0}=q(t)$ をもちいた．

Q.E.D.

8.6 超対称作用積分の一般的構成（その 2）

前節での超対称性をもつ作用積分の構成法は，超場 Φ と超共変微分 $\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ の任意関数から，$\theta\theta^\dagger$ に比例する F 項を取り出すというものであった．一般論から，F 項の超対称性変換は必ず全時間微分項で与えられるので（(8.21d) 式参照)，F 項を時間積分した作用積分は超対称性変換のもとで不変となる．これは，多くの超対称性理論の教科書に書かれている構成法である．しかしながら，

この導出だと超対称性変換のもとでの不変性はよくみえるが，超空間上での並進不変性の役割が逆にみえにくくなっている．

この節では，超空間上の並進不変性が，明白に実現される定式化を行うことにする．それは，超対称作用積分を超空間上の積分で表すことによって実現される．

超対称作用積分の一般的構成法（その 2）

$$S[\Phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta\, \mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger), \mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger)\,. \tag{8.28}$$

ここで，$\mathcal{F}$ は Φ の任意関数で，Φ には $\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$ の任意のベキがかかっていてもよい．前節での構成法 (8.25) では $\theta\theta^\dagger$ 項を取り出したが，その項は $\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger}\frac{\partial}{\partial\theta}$ を作用させても取り出すことができる．グラスマン数の性質から微分 $\frac{\partial}{\partial\theta}$ と積分 $\int d\theta$ は等価なので，$\mathcal{F}$ として $\mathcal{F} = -\frac{1}{2}(\mathbb{D}^\dagger\Phi)(\mathbb{D}\Phi) + W(\Phi)$ と選べば，上式は (8.25) 式に帰着する．しかしながら，(8.28) 式は (8.25) 式の単なる書き換え以上のものを含む．実際，(8.28) 式の表示は，次の対応

超対称性変換不変性 $\Longleftrightarrow$ 超空間並進不変性

を鮮明に浮かび上がらせてくれる．それをこれからみていくことにしよう．

では残りのスペースを使って，(8.28) 式で定義される作用積分が超対称性変換のもとで不変であることを証明して，この章を終えることにする．この証明を眺めてもらえば,「超空間上の並進不変性」と「超対称変換不変性」の間の対応が明白な形でみてとれるはずだ．これから証明することは，作用積分の超対称性変換不変性である．すなわち，

$$\delta S[\Phi] \equiv S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] = 0\,. \tag{8.29}$$

これを示すために必要な関係式は，

$$\Phi(t,\theta,\theta^\dagger) + \delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger) = \Phi(t+\Delta t, \theta+\Delta\theta, \theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,, \tag{8.30a}$$

$$\mathbb{D}\left(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger) + \delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\right) = \left(\mathbb{D}\Phi\right)(t+\Delta t, \theta+\Delta\theta, \theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,, \tag{8.30b}$$

$$\mathbb{D}^\dagger\left(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger) + \delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\right) = \left(\mathbb{D}^\dagger\Phi\right)(t+\Delta t, \theta+\Delta\theta, \theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,, \tag{8.30c}$$

$$\mathbb{D}^\dagger\mathbb{D}\left(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger) + \delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\right) = \left(\mathbb{D}^\dagger\mathbb{D}\Phi\right)(t+\Delta t, \theta+\Delta\theta, \theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,, \tag{8.30d}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

である．ここで省略されている部分は，Φ に $\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger$ の高次項（たとえば，$\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger\mathbb{D}, \mathbb{D}^\dagger\mathbb{D}\mathbb{D}^\dagger, \cdots$ 等）が作用したものである[*2)]．(8.30a) 式はすでに，8.4 節

*2) $\mathbb{D}^2 = (\mathbb{D}^\dagger)^2 = 0$ であることに注意．

の (8.17) 式で証明したので，次の (8.30b) 式を考えよう．(8.30b) 式の左辺の定義を間違えることはないだろうが，右辺は少し説明を加えておいたほうがよいだろう．右辺の正確な定義は，まず，$\mathbb{D}\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)$ を式どおりに計算して，その後で $(t,\theta,\theta^\dagger) \to (t+\Delta t, \theta+\Delta\theta, \theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)$ で置き換えたものである．すなわち，

$$\begin{aligned}&\bigl(\mathbb{D}\Phi\bigr)(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\\ &\equiv \bigl(\mathbb{D}\,\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\bigr)\Big|_{(t,\theta,\theta^\dagger)\to(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)}.\end{aligned} \tag{8.31}$$

したがって，この関数は $(t,\theta,\theta^\dagger)$ の関数というより，$(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)$ の関数とみなすほうが正しいだろう．(8.30) 式の関係は，超共変微分 $\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ が $\theta,\theta^\dagger$ の微分を含み，かつ，Δt の中に θ と $\theta^\dagger$ を含んでいるので，自明な関係ではない．(8.30) 式の両辺を直接計算して等しいことを示すこともできるが，以下で与える証明法のほうが見通しがよい．

まず，微分演算子 $\mathbb{Q},\mathbb{Q}^\dagger$ が超空間上の並進を引き起こす生成子であったことを思い出そう．すなわち，任意の $(t,\theta,\theta^\dagger)$ の関数 $f(t,\theta,\theta^\dagger)$ に対して，次式が成り立つ（(8.9) 式参照）．

$$Uf(t,\theta,\theta^\dagger) = f(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\,, \quad U\equiv e^{(\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q})}\,. \tag{8.32}$$

一方，$\mathbb{Q},\mathbb{Q}^\dagger$ と $\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ は反可換 (8.23) であったので，$\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q}$ と $\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ は可換となる．

$$[\,\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{D}\,] = [\,\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{D}^\dagger\,] = 0\,. \tag{8.33}$$

したがって，$\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ と $U=e^{(\varepsilon\mathbb{Q}^\dagger-\varepsilon^\dagger\mathbb{Q})}$ も可換である*3)．

$$U\,\mathbb{D} = \mathbb{D}\,U\,, \tag{8.34a}$$

$$U\,\mathbb{D}^\dagger = \mathbb{D}^\dagger\,U\,. \tag{8.34b}$$

これらの関係をもちいると，

$$\begin{aligned}\bigl(\mathbb{D}\Phi\bigr)(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger) &\overset{(8.32)}{=} U\bigl(\mathbb{D}\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\bigr)\\ &\overset{(8.34a)}{=} \mathbb{D}\left(U\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\right)\\ &\overset{(8.32)}{=} \mathbb{D}\left(\Phi(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)\right)\\ &\overset{(8.30a)}{=} \mathbb{D}\left(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)+\delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\right),\end{aligned}$$

となる．ここで最初の等式では，(8.31) 式を考慮して (8.32) 式をもちいた．これで (8.30b) 式が証明された．これまでの証明から明らかなように，$\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ の任意のベキに対しても同様の結果が成り立つので，(8.30) 式が一般的に成り立

*3) つまり，U によって引き起こされる超空間並進のもとで，$\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ は不変ということだ．

つことがわかる．したがって，Φ と $\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger$ の任意関数 $\mathcal{F}(\Phi)$ に対しても同様な関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger),\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger)\Big|_{(t,\theta,\theta^\dagger)\to(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger)} \\
&= \mathcal{F}(\Phi(t,\theta,\theta^\dagger),\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger)\Big|_{\Phi\to\Phi+\delta\Phi} . \qquad (8.35)
\end{aligned}$$

ここまでくれば，あと一息である．超空間上の積分が超空間座標の並進に対して不変であることが最後の鍵となる．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta\, f(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta\, f(t,\theta,\theta^\dagger) . \qquad (8.36)$$

これは，積分の並進不変性 (7.23), (7.24) 式を超空間上の積分として表したものである．

これで証明は終了だ．まとめると，超対称性変換 $\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)\to\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)+\delta\Phi(t,\theta,\theta^\dagger)$ は超空間上の並進変換: $t\to t+\Delta t, \theta\to\theta+\Delta\theta, \theta^\dagger\to\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger$ に置き換えられ，超空間上の積分 $\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d\theta^\dagger d\theta$ は超空間上の並進のもとで不変なので，作用積分 $S[\Phi]$ は超対称性変換のもとで不変となる．これを式で書き表したものが，次式である．超対称性変換のもとでの不変性と超空間上の並進不変性が見事に調和した証明だ．

$$\begin{aligned}
&S[\Phi+\delta\Phi] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta\, \mathcal{F}(\Phi+\delta\Phi,\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger)(t,\theta,\theta^\dagger) \\
&\qquad \text{(これは超対称性変換の定義だ)} \\
&\overset{(8.35)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta\, \mathcal{F}(\Phi,\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger)(t+\Delta t,\theta+\Delta\theta,\theta^\dagger+\Delta\theta^\dagger) \\
&\qquad (\because \text{超対称性変換と超空間並進の等価性}) \\
&\overset{(8.36)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\theta^\dagger d\theta\, \mathcal{F}(\Phi,\mathbb{D},\mathbb{D}^\dagger)(t,\theta,\theta^\dagger) \\
&\qquad (\because \text{超空間上の積分の並進不変性}) \\
&= S[\Phi] . \qquad (8.37)
\end{aligned}$$

第 9 章
さらに先へ進みたいあなたへ

最後の章は，本文に書かれた内容に関連する発展課題を挙げておくことにする．この章に書かれているものがすべてではないが，主だったものは網羅されていると思う．ただし，文献は私の目に止まったものを中心に引用してあるので，私の不勉強のために重要なものが抜け落ちている可能性が高いことをお断りしておく．最近では，インターネットを通じて，強力な検索ができるので，最新情報についてはキーワード検索で調べてもらったほうが確実だろう.「arXiv:」と書かれている文献については，e-prints として「http://arxiv.org/」から pdf ファイルを無料で手に入れることができる．大学の図書館でしか手に入れることができないような文献もあるが，ネット上で無料公開されている文献もあるので，まずはネット上で探してみるとよいだろう．

9.1 超対称性理論と超弦理論

本書は場の量子論を迂回し量子力学の知識のみを前提として，超対称性を説明しようと試みたものだ．場の量子論を量子力学で置き換えたので，場の量子論固有の難解さを回避しつつ，超対称性のエッセンスを捉えることができる．しかし，その代償も支払わなければならなかった．量子力学における超対称性は（第 7 章でみたように），ボース的自由度とフェルミ的自由度の入れ替えの対称性を実現することができるが，それらは残念ながら，直接ボース粒子とフェルミ粒子の間の対称性ではなかった．もともと，ボース粒子とフェルミ粒子の概念を正しく理解するためには，相対論的場の量子論なしには不可能なことだったのだ．

この本を手にした人は，場の量子論における超対称性，さらには，超弦理論に興味があることだろう．次なるステップアップを望む読者のために，いくつか教科書を挙げておくことにする．筆頭にあげられるのは，超対称性の標準的教科書である文献 [28] であろう．他にも文献 [29]，および，文献 [30] がある．

これらのうちで，どれか一冊でも読破できたなら，超対称性を知っていると胸を張ってよい*1)．超弦理論へは，上記の教科書のどれか一冊を読んでから進んだほうがよいだろう．超弦理論の標準的な教科書は文献 [31] である．比較的最近の発展は文献 [32]～[34] にみることができる．どの教科書も残念ながらレベルは高い．だが，読み終えた後の満足感も大きいはずだ．

9.2 高次元理論に潜む量子力学的超対称性

我々の宇宙は，時間 1 次元と空間 3 次元からなる 4 次元時空でできている．このことは，4 次元以外の空間（これを**余剰次元 (extra dimension)** と呼ぶ）が存在しないことを意味しない．なぜなら，余剰次元のサイズが観測装置の測定限界よりもずっと小さいならば，我々は余剰次元を "見る" ことはできないからだ．たとえば，クモの糸を考えると 1 次元的なものに見えるが，虫眼鏡や顕微鏡で覗いてみると，幅をもった 3 次元物体であることがわかる．

余剰次元を考える理由の一つは，宇宙を支配する最も基本的な理論，すなわち，究極理論の候補である超弦理論が **10 次元時空**上で構築されているからである．4 次元時空以外の 6 次元分の余剰次元が，宇宙の謎を解く鍵に違いないと考える研究者は多い．余剰次元は小さくて見えないとしても，何らかの痕跡を我々の宇宙に残しているはずだ.（さもなければ，余剰次元を考える意味が無い！）驚いたことに，その痕跡の一つが素粒子のスペクトラムにおける量子力学的超対称性なのである．余剰次元方向のゲージ対称性や重力における一般座標変換不変性などが，4 次元時空上での量子力学的超対称性の起源であることが最近の研究で明らかになっている．余剰次元をもつ高次元理論における量子力学的超対称性についての解説*2) として，（英語だが）文献 [35] が参考になるだろう．

9.3 確率過程量子化

量子力学の定式化としてよく使われるのは，微分方程式をもちいたシュレディンガー方程式，交換関係を設定して量子化する演算子形式，そして，ファインマンの経路積分表示である．それから，やや異端ではあるが，第 4 の量子化法として**確率過程量子化 (stochastic quantization)** がある．この量子化の枠組みでは，**ランジュバン方程式**と呼ばれる古典的な方程式を使って定式化できる．

*1) これらの教科書をみて，場の量子論における超対称性の性質が，この本で議論されている超対称量子力学で，どれだけ実現されているか確かめてみると面白いだろう．

*2) この解説は，残念ながら，相対論的場の量子論の知識（クライン–ゴルドン方程式，ディラック方程式，マクスウェル方程式，アインシュタイン方程式等）を前提として書かれている．

ただし，その代償（!?）として，仮想的な次元を 1 つ導入して時空を 5 次元とし，そこにランダムな力 (random force) を導入する必要がある．このランダムな力によって，量子論における確率解釈が可能となる．この理論には，超対称性に似た構造が含まれていることが知られており[25]，その性質が量子論への橋渡しを保証してくれる．確率過程量子化法について書かれた教科書は，残念ながら英語版しかないようだが，この量子化法に興味があるなら，文献 [26] をみてみるとよいだろう．

9.4 厳密に解ける量子力学模型

第 5 章で取り扱ったテーマだが，文献 [10]～[12] により詳しい議論がなされている．日本語の解説としては文献 [14] がある．この分野に興味があるなら，上に挙げた中で文献 [10] を読むことを強くお勧めする．他の文献リストもその中に与えられている．この分野は今でも活発に研究がなされており，最近でも大きな進展がみられたようだ．たとえば，小竹氏と佐々木氏によって新しいタイプの無限個のファミリーをもつ厳密に解ける一連の量子力学模型が発見された[36]．そこでは，第 5 章で議論したアイデアとその拡張[37] に基づいた方法がもちいられ，また，シュレディンガー方程式が 2 階の微分方程式ではなく 2 階の差分方程式で与えられる量子力学系も扱われている．その固有関数は，0 次式から始まる通常の直交多項式ではなく，ℓ 次式から始まる例外直交多項式・多添字直交多項式という新しいタイプの直交多項式を用いて表される．

9.5 WKB 近似

一般に量子力学模型を厳密に解くことはできないので，摂動論的に解いたり，何らかの近似法をもちいて解く必要がある．WKB 近似は，量子力学の教科書でも取り上げられているように，その中でもよく使われる有力な手法の一つである．超対称性を持たない量子力学模型に比べて，超対称量子力学模型は WKB 近似との相性がいいことが知られている．特に，第 5 章 5.4 節および 5.5 節で議論した形状不変性をもつ模型は，WKB 近似で得られた結果が厳密な結果を与えることが示されている．このように，摂動計算や近似計算の最低次が厳密な結果に等しくなるという著しい性質は，超対称性理論を特徴づける性質の一つ ——**非くりこみ定理 (non-renormalization theorem)** —— として知られているものである．超対称量子力学模型における WKB 近似については，文献 [10], [12] が参考になるだろう．

9.6 超対称性代数の拡張

第3章で超対称量子力学を特徴づけるものは，$N=2$ 超対称性代数 (3.35) 式，あるいは，(3.41) 式であることを述べたが，その拡張を考えることができる．単純な拡張は，実超電荷の数を N 個に増やした**拡張された超対称性 (extended supersymmetry)** であろう．単純な構成法は，たとえば，文献 [38] に与えられている．

これ以外の拡張の仕方として，**パラフェルミオン**と**高階微分超対称性**が知られている．複素超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ はベキ零性 $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ を満たしていたが，これを拡張して，n 乗して初めてゼロとなるベキ零性をもたせることができる．また，ハミルトニアンのエネルギースペクトラムの縮退という観点からは，

$$
\begin{aligned}
AH_+ &= H_-A\,, \\
A^\dagger H_- &= H_+A^\dagger\,,
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

の関係式があれば，2つのハミルトニアン H_+ と H_- のスペクトラムが（最低エネルギー状態を除いて）縮退することが示せる．これらの関係を**絡み合い関係式 (intertwining relation)** と呼び，演算子 $A, A^\dagger$ を intertwiner と呼ぶ．第4章のように $A, A^\dagger$ が (4.2) 式のように1階微分演算子で与えられたものがウィッテン模型ということになる*3)．より一般的に $A, A^\dagger$ を高階微分演算子に拡張しても絡み合い関係式 (9.1) を満たす，$H_+, H_-, A, A^\dagger$ が存在することが知られている．これらの拡張については文献 [11], [14] に解説がある．

本書では1次元量子力学系に議論を限ったが，2次元以上の超対称量子力学系への拡張も可能である．文献 [14]，および，文献 [39] にその例が与えられている．

9.7 境界条件と点状相互作用

この本では，いくつかの例外を除いて，主に無限に開いた空間 $(-\infty < x < \infty)$ を考察した．有限領域 $(a \le x \le b)$ での量子力学を考える場合は，端での境界条件を考慮する必要がある．1つの点での境界条件は一般に4つの実パラメータで指定されることが知られている．ディリクレ，ノイマン，周期的境界条件などは，その特別な場合にすぎない．境界条件の問題は，思った以上に豊富な物理的内容をもつことが知られている．興味のある人は，文献 [40] をみるとよいだろう．様々な性質が議論されている．

超対称性を保つ境界条件のクラスは，文献 [41] で明らかにされている．具体的な超対称量子力学模型は文献 [42] にみることができる．

---

*3) 正確に言うと，$A, A^\dagger$ が1階微分演算子で，$H_+ = A^\dagger A$, $H_- = AA^\dagger$ の場合がウィッテン模型である．

9.8 局所化

残念ながら，紙面の関係上紹介できなかった話題として，**局所化 (localization)** がある．これは，ファインマンの経路積分表示で初めてみることができる性質である．一般に経路積分表示は無限次元積分で与えられているのだが，超対称性理論ではその無限次元積分が有限次元積分に単純化される場合がある．これを局所化と呼ぶ．非常に面白い（場の量子論としては驚くべき）性質なのだが，現時点では，まだ発展段階ということもあり，まとまった解説書は出ていないようだ．日本語訳された教科書 [43] に超対称性積分の局所化についての項目があるので，興味のある読者はみてみるとよい．私も局所化をニコライ変換とともに興味を持って注目している一人だ．

9.9 超対称格子模型

量子力学模型や場の量子論は一部の模型を除いて，厳密に解くことはできない．そのため，通常は摂動論を使って解析を進めることが多い．では，摂動論では追うことのできない非摂動的効果を知りたいときにはどうしたらよいだろうか？　一つの手段として強力な道具を提供してくれるのは，**格子理論 (lattice theory)** [44] である．格子理論では，時間や空間は連続変数から離散的な点の集合に置き換わる．同時に微分は**差分**に置き換えられる．そして，計算機をもちいて数値的に問題を解いてしまおうというのである．この手法によって，クォークの閉じ込めと呼ばれる素粒子物理の未解決問題が解かれた．

当然，多くの研究者は，超対称性模型を格子上に乗せて超対称格子模型を構築しようと試みた [45], [46]．しかし，30 年以上経っても未だに誰もが満足のいく超対称性をもつ格子模型を作ることに成功していない．その理由の一つは，微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ を格子上で差分演算子 ∇ に置き換えたとき，関数の積に対する微分の公式（**ライプニッツ則**）$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}$ が，差分演算子に対して成り立たない $(\nabla(fg) \neq (\nabla f)g + f(\nabla g))$ ことにある．実際，どのような差分演算子を選んでも，ライプニッツ則は成り立たないことが証明されてしまった [47]．これはホットな話題であり,（場の量子論でなくてもよいので）1 次元量子力学の格子模型で超対称性を保つ模型が作れたなら，それは重大な発見をしたことになる．格子上の超対称性の解説は英語で書かれたものならいくつかあるが，恐らく,「lattice supersymmerty」などのキーワード検索をして最新のものを探したほうがよいだろう．

付録 A
超対称場の量子論の基本的性質

この付録の目的は，超対称場の量子論 (supersymmetric quantum field theory) の基本的な性質を紹介し，それらの性質が（いくつかの例外はあるが）幸運なことに，本文で議論した超対称量子力学に簡単化された形で引き継がれているのを確かめてもらうことである．皆さんがこの付録を読み始める前に，念を押しておいたほうがよいだろう．この付録に書かれていることを決して理解しようとしてはならない．超対称場の量子論について詳しく解説することを意図したものではない．読んでも何が書いてあるのか，よくわからないと感じるのは当然だ．それでかまわない．この付録のお勧めの使い方は，第 7 章に入ってから，できれば一度第 7 章と第 8 章を読み終えてから，さらっとこの付録に目を通すことだ．そうすれば，似たような言葉や式がこの付録のあちらこちらに散らばっているのを発見するだろう．超対称性をもつ場の量子論と量子力学の類似性を少しでも感じ取ってもらえれば，この付録の目的は達せられたことになる．

A.1 Wess–Zumino 模型

スカラー場とスピノル場からなる（最も簡単な）超対称場の量子論は Wess–Zumino 模型 [48] と呼ばれ，次式で与えられる*1)．

$$S_{WZ} = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + i\,\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + F^* F + F\,\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} + F^* \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi}\right)^* \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\eta \cdot \eta\,\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial^2 \phi} - \frac{1}{2}\overline{\eta} \cdot \overline{\eta} \left(\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial^2 \phi}\right)^* \right\}. \tag{A.1}$$

ここで，ϕ は複素スカラー場，η は 2 成分 Weyl スピノル場，F は複素スカラー

*1) $\eta, \overline{\eta}$ はフェルミ的変数なので，(A.1) 式の中の $\eta \cdot \eta$ や $\overline{\eta} \cdot \overline{\eta}$ はゼロになりそうに思えるが，$\eta, \overline{\eta}$ は 2 成分をもつのでゼロにはならない．$\eta \cdot \eta$ や $\overline{\eta} \cdot \overline{\eta}$ 記号の詳細は文献 [28] を参照のこと．ここでは細かな定義は気にしないように！

場（補助場）である．$W(\phi)$ は超ポテンシャル (superpotential) と呼ばれ，ϕ のみ（ϕ^* には依存しない）の任意関数である．また，2×2 行列 $\overline{\sigma}^\mu$ と積分 $\int d^4x$, 微分 ∂_μ ($\mu = 0,1,2,3$) の定義は以下のとおりである．(ここで光速 c は 1 にとっている．)

$$\overline{\sigma}^\mu = (I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,, \quad \int d^4x = \int dtdxdydz\,, \ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

ここで σ_a ($a = 1,2,3$) はパウリ行列である．ラグランジアンは $\dot{F}$（F の時間成分）を含まないので，場 F は補助場 (非物理的な自由度) である．実際，運動方程式をもちいて F をラグランジアン（あるいは作用積分）から消去することができる．

$$\begin{aligned} S_{WZ}^{\text{on-shell}} &\equiv S_{WZ}\Big|_{F=-\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)^*} \\ &= \int d^4x \Bigg\{ \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + i\,\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta - \left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}\right|^2 \\ &\qquad -\frac{1}{2}\eta\cdot\eta\,\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial^2\phi} - \frac{1}{2}\overline{\eta}\cdot\overline{\eta}\left(\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial^2\phi}\right)^* \Bigg\}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

■ コメント ■

- スカラーポテンシャルは正定値： $V(\phi,\phi^*) = \left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}\right|^2 \geqq 0.$
- たとえば，$W(\phi) = \frac{\lambda}{3}\phi^3$ ととると，湯川相互作用（$\eta\cdot\eta\phi$ の項）とスカラー場の自己相互作用（$|\phi|^4$ の項）にかかる結合定数は独立ではなく，次のように関係していることがわかる．

  $$-\lambda^2|\phi|^4 - \lambda\eta\cdot\eta\phi - \lambda\overline{\eta}\cdot\overline{\eta}\phi^*.$$

  このように，超対称性は，異なる相互作用の結合定数に関係をつける．
- 自由度（on-shell でも off-shell でもボース場とフェルミ場の自由度は等しい．）

	off-shell	on-shell
ϕ	2	2
η	4	2
F	2	0

- 時空の次元によって，ラグランジアンの形は異なる．(スピノルやゲージ場は次元によって一般に自由度が異なる．)

■

A.2 超対称性変換

前の節で与えた Wess–Zumino 模型の作用 S_{WZ} は次の（無限小）超対称性

変換 (supersymmetry transformation)

$$
\begin{cases}
\delta\phi = \sqrt{2}\,\varepsilon \cdot \eta\,, \\
\delta\eta = -i\sqrt{2}\,\sigma^\mu \bar{\varepsilon} \partial_\mu \phi + \sqrt{2}\,\varepsilon F\,, \\
\delta F = -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta\,,
\end{cases}
\tag{A.3}
$$

のもとで不変である．すなわち，

$$
\delta S_{WZ} = 0\,. \tag{A.4}
$$

ここで $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ は反可換な 2 成分グラスマンパラメータである．

■ コメント ■

上の超対称性変換で重要な点は

i) (ϕ, F) と η を混ぜる変換である．すなわち，ボース場とフェルミ場を入れ替える変換である．

ii) F の変換は，全微分の形（$\delta F = \partial_\mu(-i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\sigma}^\mu \eta)$）をしていることに注意．この事実は，後で述べる超場形式で超対称性をもつ一般的なラグランジアンを求めるときに重要となる．

iii) $\langle \delta\eta \rangle = \sqrt{2}\,\varepsilon \langle F \rangle$.
これは，超対称性の破れが，補助場の真空期待値で与えられることを意味している．

iv) 上の変換は，1) 超対称性変換はボース場とフェルミ場を入れ替える変換，2) 次元解析（$\phi, \eta, F, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, t$ の質量次元はそれぞれ $1, \frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$），3) η は Weyl フェルミオン，4) 場に対する線形変換であることを考慮すると係数を除いて一意的に決まる．

■

作用積分 S_{WZ} が超対称性変換のもとで不変なので，保存量が存在することになる．この保存量が超電荷 Q_α に対応する．

保存量 = 超電荷 (supercharge)：Q_α.

■ コメント ■

超対称性変換のもとで作用積分自身は不変であるが，ラグランジアンは不変ではない．実際，超対称性変換のもとでラグランジアンは次のように変換する．

$$
\delta\mathcal{L}_{WZ} = \partial_\mu K^\mu. \qquad (\leftarrow\text{全微分の形になっている！})
$$

もちろん，4 次元時空で積分した作用積分（の変化分）δS_{WZ} は，無限遠方で場が 0 とすれば，$\delta S_{WZ} = 0$ となる．ラグランジアンの変化分が上のようになる場合でも（拡張された）ネーターの定理 (Noether's theorem) が成り立ち，保存量を導くことができる.（本文 7.6 節参照.）

■

A.3 超場形式

一般的な超対称場の量子論を構築する方法は，時空を超空間 (superspace) へ拡張することである．

$$x^\mu \to (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha)\,.$$

ここで，$\theta_\alpha (\alpha = 1, 2)$ は 2 成分グラスマン数で，次の性質を満たす．

$$\theta_\alpha \theta_\beta = -\theta_\beta \theta_\alpha\,, \quad \text{特に } (\theta_\alpha)^2 = 0.$$

また，$\bar{\theta}_\alpha = (\theta_\alpha)^*$ である．この拡張にともなって，場は超場 (superfield) へ拡張される．

$$\phi(x) \to \Phi(x, \theta, \bar{\theta}).$$

Wess–Zumino 模型を得るには，上記の超場を制限したカイラル超場 $\Phi(x, \theta)$ を導入する．カイラル超場は，(本質的に) x^μ と θ_α のみに依存する超場で，θ_α で展開すると

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \sqrt{2}\,\theta \cdot \eta(x) + \theta \cdot \theta F(x) \qquad \underbrace{+\ \cdots\cdots}_{\text{以下の議論では重要ではない}}$$

となる．各展開係数に Wess–Zumino 模型に含まれる場がすべて現れていることに注意しよう．このように，超場は超対称性変換によって互いに結びつく場をひとまとめにしたものであることがわかる．この超場を用いて，超対称性をもつラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= K(\Phi, \Phi^*)\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \Big(W(\Phi) + h.c.\Big)\Big|_{\theta^2} \\ &= \underbrace{\int d^2\bar{\theta} d^2\theta\ K(\Phi, \Phi^*)}_{D\text{ 項}} + \underbrace{\left(\int d^2\theta\ W(\Phi) + h.c.\right)}_{F\text{ 項}},\end{aligned}$$

で与えられる．これには少し説明が必要であろう．

■ コメント ■

- $\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$ は $K(\Phi, \Phi^*)$ を θ と $\bar{\theta}$ で展開して $\theta^2\,\bar{\theta}^2$ 項の係数を取り出すことを意味する．$\Big|_{\theta^2}$ は $W(\Phi)$ を θ で展開して θ^2 項の係数を取り出すことを意味する*2)．2 行目の右辺第 1 項の積分 $\int d^2\bar{\theta} d^2\theta$ は $\theta^2\bar{\theta}^2$ 項の係数を取り出す操作と等価である．
- 右辺第 1 項は D 項 (D term)，第 2 項は F 項 (F term) と呼ばれる．$K(\Phi, \Phi^*)$ はケーラーポテンシャル (Kähler potential)，$W(\Phi)$ は超ポテンシャル (superpotential) と呼ばれる．D 項は運動項のように微分を含んだ項を与え，F 項は微分を含まないポテンシャ

*2) $\theta^2 \equiv \theta \cdot \theta$ の定義は文献 [28] 参照．

ル項を与える．前節の Wess–Zumino 模型はケーラーポテンシャルとして $K = \Phi^* \Phi$ ととったものに対応する．

- このラグランジアンが超対称性をもつことを示すためには，もう少し詳細な超場形式の議論が必要となる．超対称量子力学でも超場形式を構築することができるので，第 8 章で一般的な超対称ラグランジアンの構成法を学ぶことにしよう．
- 超対称量子力学には，カイラル超場のようなカイラルな構造（θ_α のみに依存して，$\bar{\theta}_\alpha$ に依存しない）は入らない．このカイラルな構造は，ホロモーフィ（holomorphy：正則性）と呼ばれ，非くりこみ定理など量子補正の現れ方に厳しい制限を与える．残念ながら，超対称量子力学では，ホロモーフィの性質を垣間見ることはできない．

■

A.4 非くりこみ定理

超対称場の量子論では，ボース場からの寄与とフェルミ場からの寄与の間で相殺が起こって，量子補正が消えてしまうことがある．この現象は，非くりこみ定理 (non-renormalization theorem)*3) として知られ，超対称性理論の重要な特徴の一つである．以下にその例を挙げておく．

- 超対称性が破れていなければ，真空エネルギーは厳密にゼロである．この性質は超対称量子力学でも全く同じである．
- F 項（超ポテンシャル $W(\Phi)$ の項）は，摂動論的にくりこみを受けない．また，非摂動論的にも非常に制限された形でのくりこみしか現れない．D 項は摂動論的くりこみを一般に受ける*4)．超対称量子力学でも，WKB 近似が厳密な結果を与えるなど，高次の摂動効果が相殺して消えることが知られている．
- ゲージ結合定数の β 関数は，1 ループからの寄与のみしか依存しない．(注：この結果は，正則性 (holomorphy) を保つくりこみ処方を行なった場合に正しい．)
- Fayet–Iliopoulos の $U(1)D$ 項が存在せず，tree レベルで超対称性が破れていなければ，摂動論の任意の次数で超対称性は破れない．Fayet–Iliopoulos の $U(1)D$ 項は，2 ループ以上の量子補正からは生成されないことが知られている．

---

*3) ワインバーグの教科書 [30] に，文献リストと非くりこみ定理の証明が与えられている．

*4) F 項がくりこみを受けないということは，質量や湯川結合，スカラー場の自己相互作用などはくりこみを受けないことを意味する．D 項はくりこみを受けるので波動関数のくりこみ (wavefunction renormalization) の効果は存在する．

A.5 真空エネルギーと超対称性の破れ

超対称代数 (supersymmetry algebra)

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu$$

に現れる γ 行列としてマヨラナ表示（$Q^c \equiv C\overline{Q}^T = Q^*$ となる表示）をとり，上式の $\{\alpha, \beta\}$ についてトレースをとると次式となる.（この表示では，超電荷 Q_α は $Q_\alpha^* = Q_\alpha$ を満たす.）

$$H = \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{4}(Q_\alpha)^2.$$

この関係から直ちに次のことが結論づけられる.（この結果は，超対称量子力学でも全く同様に成り立っている.）

- $E \geqq 0$.
- 真空エネルギーを E_0 としたとき*5)，

$E_0 = 0 \Longleftrightarrow$ 超対称性は破れていない.

$E_0 > 0 \Longleftrightarrow$ 超対称性の自発的破れ.

■ コメント ■

おそらく 2 番目の結論には説明が必要だろう. $H = \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{4}(Q_\alpha)^2$ の形から，真空状態を $|0\rangle$ と表すと，

$$E_0 = 0 \Longleftrightarrow Q_\alpha|0\rangle = 0,$$
$$E_0 > 0 \Longleftrightarrow Q_\alpha|0\rangle \neq 0$$

を意味する. 超電荷 Q_α は保存量であると同時に超対称性変換を引き起こす生成子でもあるので，上式右の関係式は次のことを意味する.

$Q_\alpha|0\rangle = 0 \Longleftrightarrow$ 真空は超対称性変換のもとで不変.

$\Longleftrightarrow$ 超対称性は破れていない.

$Q_\alpha|0\rangle \neq 0 \Longleftrightarrow$ 真空は超対称性変換のもとで不変ではない.

$\Longleftrightarrow$ 超対称性は自発的に破れている.

■

次にウィッテン指数 Δ_W を次式で定義しておこう.（下の定義は超対称量子力学での定義と同じだ.）

*5) 連続的対称性の自発的破れにともなって，質量ゼロの粒子がスペクトラムに現れる (Nambu–Goldstone の定理). 超対称性の自発的破れの場合は，質量ゼロの粒子はスピン $\frac{\hbar}{2}$ をもつフェルミ粒子で Nambu–Goldstone フェルミオン（あるいは，goldstino）と呼ばれる.

$$\Delta_W = \mathcal{N}_B^{E=0} - \mathcal{N}_F^{E=0}.$$

ただし*6)，

$$\mathcal{N}_B^{E=0} = (E = 0 \text{ のボース状態の数}),$$
$$\mathcal{N}_F^{E=0} = (E = 0 \text{ のフェルミ状態の数}).$$

このウィッテン指数*7)は，次に述べる理由から，非常に有用な量であることがわかる．

i) Δ_W は位相不変量 (topological invariant) であり，弱結合／強結合の極限，あるいは，$m \to \infty$ などの極限をとることによって厳密に計算できることが，多くの模型で知られている．

ii) もし，$\Delta_W \neq 0$ ならば，超対称性は非摂動論的にも破れない．(逆は必ずしも真ならず！）このことは現象論的に重要な意味を持つ．現実の低エネルギーの世界では，超対称性は見えていないので，超対称性は破れている必要がある．現象論的モデルを作ろうとする場合は，$\Delta_W = 0$ のモデルでなければばならない．さもなければ，そのモデルは超対称性が決して破れないからである．

A.6 ニコライ変換

超対称場の量子論は次の性質を満たす，ボース場の間の変換（Nicolai mapping と呼ばれる変換）が存在する[21]．

$$\phi_i(x) \to \rho_i(x) \, .$$

i) ウィック回転により得られるユークリッド化されたラグランジアンのボース場の部分は（補助場を消去した後）次のように書ける．

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\sum_i \rho_i(x)^2 + \text{全微分項} \, .$$

ii) $\phi_i(x) \to \rho_i(x)$ への変換のヤコビアンの逆数はフェルミオン場の積分によって得られる行列式と等しい．すなわち

$$\begin{aligned}
Z &\equiv \int [d\phi\, d\overline{\eta}\, d\eta]\ \mathrm{e}^{-\int d^4x \{\mathcal{L}_B(\phi) + \overline{\eta} M(\phi) \eta\}} \\
&= \int [d\phi]\ \det M(\phi)\ \mathrm{e}^{-\int d^4x \mathcal{L}_B(\phi)} \\
&= \int [d\rho]\ \mathrm{e}^{-\int d^4x \frac{1}{2}\rho_i^2} \, .
\end{aligned}$$

*6) 超対称量子力学の言葉では，ボース状態とフェルミ状態はそれぞれ $(-1)^F = +1$ と -1 の固有状態に対応する．

*7) ウィッテン指数に関しては，本文第 4 章で詳しく議論されている．

■ コメント ■
- ニコライ変換は，一般に非線形で非局所的である．
- ニコライ変換の存在は，理論が自明であることは意味しない．
- ニコライ変換は，前節 A.5 の真空エネルギーやウィッテン指数の性質と密接に関係する．
- 超対称量子力学では，ニコライ変換を（局所的な形で）具体的に求めることができる．ニコライ変換に関するより詳しい議論は本文 7.13 節に与えられている．

A.7 Coleman–Mandula/Haag–Lopuszanski–Sohnius の定理

Coleman と Mandula [1] と Haag，Lopuszanski と Sohnius [2] らは，場の量子論に関する一般的な仮定

1. S 行列は，3+1 次元の局所的な相対論的場の量子論に基づいて構成される．
2. 任意の質量 M について，M より軽い質量の粒子の種類は有限個である．
3. 真空と 1 粒子状態の間にはエネルギーギャップが存在する．

のもとで，S 行列の持ちうる対称性の最も一般的なリー代数 (Lie algebra) は，次のもののみであることを示した．

$$\begin{cases} P_\mu & : \text{エネルギー・運動量演算子}, \\ M_{\mu\nu} & : \text{ローレンツ変換の生成子}, \\ G^a & : \text{コンパクトリー群の（リー代数の）生成子}, \\ Q^I_\alpha & : \text{超電荷（}\alpha\text{はスピノルの足}, I \text{ は超電荷の種類）}. \end{cases}$$

この定理をかい摘んで言うと,『自明でない相互作用をもつ相対論的場の量子論として許される対称性は，よく知られた，時空の並進の対称性，ローレンツ変換の対称性，大域的対称性，ゲージ対称性を除けば，残りは

超対称性 (supersymmetry)

のみである』と主張するものである．したがって，**相対論的場の量子論の枠内で許される対称性をすべて知ったことになる**．我々は神の領域に近づいたのだろうか !?

■ コメント ■
- Coleman–Mandula の原論文は難しいが，Weinberg の教科書 [30] にその解説（それでも難しいが ···）が載っている．Haag–Lopuszanski–Sohnius らの議論は例えば，Wess–Bagger の教科書 [28]，あるいは上記の Weinberg の教科書を参考にするとよい．
- 実は，この定理は S 行列のもつ（物理的状態の間の）対称性に関

するものなので，負ノルムを含むような対称性（ゲージ理論における共変ゲージをとったときに現れる BRS 対称性など）は，この定理によって禁止されない．

- もし，質量ゼロの粒子しか含まない理論では，ポアンカレ代数（$P_\mu \oplus M_{\mu\nu}$）は共形代数（$P_\mu \oplus M_{\mu\nu} \oplus D \oplus K_\mu$）にまで拡張される．このとき，それぞれの生成子は，時空座標 x^μ に対して次の微小変換を引き起こす．

$$x^\mu \to x^\mu + \underbrace{\varepsilon^\mu}_{P_\mu} + \underbrace{\omega^{\mu\nu} x_\nu}_{M_{\mu\nu}} + \underbrace{\lambda x^\mu}_{D} + \underbrace{\rho^\mu x^\nu x_\nu - 2x^\mu \rho^\nu x_\nu}_{K_\mu}$$

これは，光円錐を不変にするもっとも一般的な微小変換である．■

A.8　3 + 1 次元 $N = 1$ 超ポアンカレ代数

$N = 1$ 超ポアンカレ代数 (super Poincaré algebra) は，$\{P_\mu, M_{\mu\nu}, Q_\alpha\}$ からなり次の交換関係あるいは反交換関係で与えられる.（N は超電荷 Q_α の種類を表し，$N = 1$ は超電荷が 1 つの最も簡単な超対称代数ということになる.）

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \,,$$

この交換関係は，エネルギーと運動量が保存すること，
および時空並進はたがいに可換であることを意味する．

$$[P_\mu, M_{\nu\lambda}] = i(\eta_{\mu\nu} P_\lambda - \eta_{\mu\lambda} P_\nu) \,,$$

P_μがローレンツ変換のもとでベクトルとして振る舞うことを意味する．

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\nu\lambda} M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho} M_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda} M_{\nu\rho}) \,,$$

$M_{\mu\nu}$がローレンツ変換のもとでテンソルとして振る舞うことを意味する．

$$\bigoplus$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \,,$$

ボース状態とフェルミ状態の間にスペクトラムの縮退が存在.
超電荷 Q_αは保存する．

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu} Q)_\alpha \,, \qquad \left(\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right)$$

超電荷 Q_α はローレンツ変換のもとでスピノル（スピン$\frac{\hbar}{2}$）として振る舞う．

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu \,,$$

超対称性変換を 2 度連続して行うと時空の並進を引き起こす．
この反交換関係が超対称代数の中で最も重要な関係式である．

ここで，$Q_\alpha(\alpha = 1 \sim 4)$はマヨラナスピノルで，荷電共役変換のもとで不変（$Q^c = Q$）である．$Q_\alpha$ のことを超電荷と呼ぶ．また，行列 C は荷電共役行列であり，荷電共役変換は $Q^c \equiv C\,\overline{Q}^T$ で定義される．

■コメント■

超対称量子力学では，時間成分のみを取り出した代数が実現される．

参考文献

[1] S. R. Coleman and J. Mandula, All Possible Symmetries Of The S Matrix, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.

[2] R. Haag, J. Lopuszanski and M. Sohnius, All Possible Generators of Supersymmetries of the *S*-Matrix, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[3] 九後汰一郎著,『ゲージ場の量子論 I, II』, 培風館, 1989.

[4] 坂井典佑著,『場の量子論』, 裳華房, 2002.

[5] 柏太郎著,『新版 演習 場の量子論』, サイエンス社, 2006.

[6] H. フランダース著,『微分形式の理論』, 岩波書店, 1967.

[7] シュッツ著,『物理学における幾何学的方法』, 吉岡書店, 1987.

[8] 中原幹夫著,『理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II』, ピアソンエデュケーション, 2000.

[9] E. Witten, Dynamical Breaking of Supersymmetry, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 513; Constraints on Supersymmetry Breaking, *Nucl. Phys.* **B202** (1982) 253.

[10] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Science 2001; *Phys. Rep.* **251** (1995) 267; e-Print arXiv:hep-th/9405029.

[11] B. Bagchi, *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*, Chapman & Hall/CRC 2001.

[12] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer 1996.

[13] T. Nagasawa, S. Ohya, K. Sakamoto, M. Sakamoto and K. Sekiya, Hierarchy of QM SUSYs on a Bounded Domain, *J. Phys.* **A42** (2009) 265203; e-Print arXiv: 0812.4659 [hep-th].

[14] 山田吉英, 超対称量子力学とその拡張, 物性研究 **90–6** (2008–9).

[15] P. A. M. Dirac, *Lecture on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ. 1964.

[16] J. C. Ward, An Identity in Quantum Electrodynamics, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.

[17] Y. Takahashi, On the generalized Ward identity, *Nuovo Cim.* **6** (1957) 371.

[18] S. Cecotti and L. Girardello, Functional Measure, Topology and Dynamical Supersymmetry Breaking, *Phys. Lett.* **B110** (1982) 39.

[19] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, MacGraw–Hill, 1965.

[20] 崎田文二, 吉川圭二,『経路積分による多自由度の量子力学（物理学選書）』, 岩波書店, 1986.

[21] H. Nicolai, On a New Characterization of Scalar Supersymmetric Theories, *Phys. Lett.* **B89** (1980) 341; Supersymmetry And Functional Integration Measures, *Nucl. Phys.* **B176** (1980) 419.

[22] M. Sakamoto, Construction Of Supersymmetric Theories By Use Of The Local Nicolai Mapping, *Prog. Theor. Phys.* **73** (1985) 225.

[23] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan and G. Veneziano, Stochastic Identities In Supersymmetric Theories, *Phys. Lett.* **B142** (1984) 399; Stochastic Identities In Quantum Theory, *Nucl. Phys.* **B255** (1985) 1.

[24] G. Parisi and Y. -S. Wu, *Sci. Sinica*, **24** (1981) 483.

[25] G. Parisi and N. Sourlas, Random Magnetic Fields, Supersymmetry and Negative Dimensions, *Phsy. Rev. Lett.* **43** (1979) 744; Supersymmetric Field Theories and Stochastic Differential Equations, *Nucl. Phys.* **B206** (1982) 321.

[26] B. Sakita, *Stochastic Quantization*, in Proc. 7th Johns Hopkins Workshop, ed. G. Domokos and S. Kovesi-Domokos, World Scientific, Singapore, 1983;
P. H. Damgaard and H. Hüffel, Stochastic Quantization, *Phys. Rep.* **152** (1987) 227;
S. Chaturvedi, A. K. Kapoor and V. Srinivasan, *Stochastic Quantization Scheme of Parisi and Wu*, Bibliopolis, Napoli, 1990;
M. Namiki, *Stochastic Quantization*, Springer–Verlag, Berlin, 1992.

[27] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, 1966.

[28] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1992; 志摩一成訳,『超対称性と超重力』, 丸善出版, 2011.

[29] 太田信義, 坂井典佑著,『超対称性理論：現代素粒子論の基礎として』臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ–51, サイエンス社, 2006.

[30] S. ワインバーグ著, 青山秀明, 杉山勝之, 有末宏明訳,『場の量子論〈5 巻〉超対称性：構成と超対称標準模型』, 吉岡書店（物理学叢書）, 2001.

[31] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory: Vol.1 & Vol.2*, Cambridge University Press, 1987.

[32] J. Polchinski, *String Theory: Vol.I & Vol.II*, Cambridge University Press, 2001.
J. ポルチンスキー著, 伊藤克司他訳,『ストリング理論, 全 2 巻』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005.

[33] 太田信義著,『超弦理論・ブレイン・M 理論』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002.

[34] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, 2004.

[35] M. Sakamoto, Hidden Quantum-Mechanical Supersymmetry in Extra Dimensions, e-Print arXiv: 1201.2448 [hep-th].

[36] S. Odake and R. Sasaki, Exactly Solvable Quantum Mechanics and Infinite Families of Multi-indexed Orthogonal Polynomials, *Phys. Lett.* **B702** (2011) 164, arXiv:1105.0508[math-ph]; Discrete Quantum Mechanics, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 353001 (47pp) arXiv: 1104.0473[math-ph].

[37] M. M. Crum, Associated Sturm–Liouville Systems, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **(2) 6** (1955) 121–127;
V. E. Adler, A Modification of Crum's Method, *Theor. Math. Phys.* **101** (1994) 1381–

1386.

[38] T. Nagasawa, M. Sakamoto and K. Takenaga, Extended Supersymmetry and its Reduction on a Circle with Point Singularities, *J. Phys.* **A38** (2005) 8053, e-Print arXiv: hep-th/0505132.

[39] C. S. Lim, T. Nagasawa, M. Sakamoto and H. Sonoda, Supersymmetry in Gauge Theories with Extra Dimensions, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 064006, e-Print arXiv: hep-th/0502022.

[40] T. Cheon, T. Fulop and I. Tsutsui, Symmetry, Duality, and Anholonomy of Point Interactions in One Dimension, *Ann. Phys.* **294** (2001) 1, e-Print arXiv: quant-ph/0008123.

[41] T. Nagasawa, S. Ohya, K. Sakamoto, M. Sakamoto and K. Sekiya, Hierarchy of QM SUSYs on a Bounded Domain, *J. Phys.* **A42** (2009) 265203, e-Print arXiv: 0812.4659 [hep-th].

[42] T. Nagasawa, M. Sakamoto and K. Takenaga, Supersymmetry in Quantum Mechanics with Point Interactions, *Phys. Lett.* **B562** (2003) 358, e-Print arXiv: hep-th/0212192; T. Uchino and I. Tsutsui, Supersymmetric Quantum Mechanics with a Point Singularity, *Nucl. Phys.* **B662** (2003) 447, e-Print arXiv: quant-ph/0210084.

[43] S. カッツ著，清水勇二訳『数え上げ幾何と弦理論』，日本評論社，2011.

[44] 青木慎也著,『格子上の場の理論』，シュプリンガー・ジャパン，2005.

[45] P. H. Dondi and H. Nicolai, Lattice Supersymmetry, *Nuovo Cim.* **A 41** (1977) 1.

[46] N. Sakai and M. Sakamoto, Lattice Supersymmetry And The Nicolai Mapping, *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 173.

[47] M. Kato, M. Sakamoto and H. So, Taming the Leibniz Rule on the Lattice, *JHEP* **0805** (2008) 057, e-Print arXiv: 0803.3121 [hep-lat].

[48] J. Wess and B. Zumino, Supergauge Transformations in Four Dimensions, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.

索　　引

欧字

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

著者略歴

坂本（さかもと）　**眞人**（まこと）

1985 年　九州大学大学院理学研究科博士後期課程修了　理学博士．
　　　　日本学術振興会奨励研究員
　　　　（所属：九州大学理学部（1985–1986 年）），
　　　　日本学術振興会特別研究員
　　　　（所属：九州大学理学部（1986–1987 年）
　　　　　　　京都大学基礎物理学研究所（1987–1988 年）），
　　　　京都大学基礎物理学研究所研究員（1988 年）を経て，
1988 年　神戸大学理学部物理学科助手
　　　　ニールスボーア研究所文部省在外研究員（1992–1993 年）
現　在　神戸大学大学院理学研究科物理学専攻 助教

専　門　素粒子理論：高次元理論，超対称性理論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ- 96
『量子力学から超対称性へ　超対称性のエッセンスを捉える』

著　者　坂本 眞人
2012 年 12 月 25 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　　TEL.(03)5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-92：for Senior & Graduate Courses）

弦の場の理論

弦理論のより深い理解のために

石橋延幸・村上公一　共著

本体 2429 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

本書は，重力の量子論の最も有望な候補と考えられている弦理論を第二量子化した「弦の場の理論」について解説している．歴史的発展を追いながら，基本的事項から Witten による理論をはじめ，様々なタイプの理論構成を概説し，とくに有用性を発揮している「タキオン凝縮」についても議論が展開される．

サイエンス社